10-1 Международный разнобой 24 сентября 2020

**1.** Перестановку целых чисел $1, 2, \dots, m$ будем называть *свежей*, если не существует натурального $k < m$ такого, что первые $k$ чисел в этой перестановке — это $1, 2, \dots, k$ в некотором порядке. Пусть $f_m$ — количество всех свежих перестановок чисел $1, 2, \dots, m$. Докажите, что $f_n \geqslant n f_{n-1}$ для всех $n \geqslant 3$.

**2.** Точка $P$ внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ такова, что

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажите, что биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle PCB$ пересекаются на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$.

**3.** Дано натуральное $n > 1$. На склоне горы есть $n^2$ станций, все на разной высоте. Каждая из компаний $A$ и $B$ управляет $k$ канатными дорогами, каждая канатная дорога обеспечивает перемещение с одной из станций на более высокую (без промежуточных остановок). У каждой компании канатные дороги имеют $k$ различных начальных точек и $k$ различных конечных точек, при этом канатная дорога, которая начинается выше, также и заканчивается выше. Для какого наименьшего $k$ обязательно найдутся две станции такие, что от одной до другой можно добраться только канатными дорогами компании $A$, а также только канатными дорогами компании $B$?

**4.** Натуральное число $k$ таково, что для каждого натурального $m$ существует число Фибоначчи, сравнимое с $k$ по модулю $m$. Обязательно ли $k$ является числом Фибоначчи?

**5.** О выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $\angle A = \angle C = \angle E$ и $\angle B = \angle D = \angle F$. Докажите, что если биссектрисы внутренних углов $\angle A, \angle C, \angle E$ пересекаются в одной точке, то и биссектрисы внутренних углов $\angle B, \angle D, \angle F$ пересекаются в одной точке.

**6.** На доске записаны $n > 1$ натуральных чисел (не обязательно различных). Известно, что среднее арифметическое любых двух из них является также и средним геометрическим некоторых чисел на доске (возможно, одного). При каких $n$ все числа на доске обязательно равны?

10-1 Международный разнобой 24 сентября 2020

**1.** Перестановку целых чисел $1, 2, \dots, m$ будем называть *свежей*, если не существует натурального $k < m$ такого, что первые $k$ чисел в этой перестановке — это $1, 2, \dots, k$ в некотором порядке. Пусть $f_m$ — количество всех свежих перестановок чисел $1, 2, \dots, m$. Докажите, что $f_n \geqslant n f_{n-1}$ для всех $n \geqslant 3$.

**2.** Точка $P$ внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ такова, что

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажите, что биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle PCB$ пересекаются на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$.

**3.** Дано натуральное $n > 1$. На склоне горы есть $n^2$ станций, все на разной высоте. Каждая из компаний $A$ и $B$ управляет $k$ канатными дорогами, каждая канатная дорога обеспечивает перемещение с одной из станций на более высокую (без промежуточных остановок). У каждой компании канатные дороги имеют $k$ различных начальных точек и $k$ различных конечных точек, при этом канатная дорога, которая начинается выше, также и заканчивается выше. Для какого наименьшего $k$ обязательно найдутся две станции такие, что от одной до другой можно добраться только канатными дорогами компании $A$, а также только канатными дорогами компании $B$?

**4.** Натуральное число $k$ таково, что для каждого натурального $m$ существует число Фибоначчи, сравнимое с $k$ по модулю $m$. Обязательно ли $k$ является числом Фибоначчи?

**5.** О выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $\angle A = \angle C = \angle E$ и $\angle B = \angle D = \angle F$. Докажите, что если биссектрисы внутренних углов $\angle A, \angle C, \angle E$ пересекаются в одной точке, то и биссектрисы внутренних углов $\angle B, \angle D, \angle F$ пересекаются в одной точке.

**6.** На доске записаны $n > 1$ натуральных чисел (не обязательно различных). Известно, что среднее арифметическое любых двух из них является также и средним геометрическим некоторых чисел на доске (возможно, одного). При каких $n$ все числа на доске обязательно равны?