«Ничего личного, просто матбой» vs «Вопли математиков»

1. Рассматриваются всевозможные множества M из n точек плоскости общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). При каком наименьшем k можно для любого M найти множество K из k точек такое, что строго внутри любого треугольника с вершинами из M найдётся точка множества K?

2. Произведение действительных чисел a, b, c равно 1. Могут ли все три числа $2a - \frac{1}{b}$, $2b - \frac{1}{c}$, $2c - \frac{1}{a}$ быть больше 1?

3. Для каких натуральных n существует перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, в которой ни для каких индексов i, j, k, где $i < k < j$, не выполняется равенство $a_k = \frac{a_i + a_j}{2}$?

4. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках Z и Y соответственно. Пусть G — точка пересечения отрезков BY и CZ, а точки R и S таковы, что $BCYR$ и $BCSZ$ — параллелограммы. Докажите, что $GR = GS$.

5. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ — корни многочлена $x^3 - 3x - 1$. Докажите, что

$$x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1.$$

6. Оля и Катя по очереди (начинает Оля) расставляют в клетках таблицы 6×6 действительные числа. Ставить число, которое уже стоит в какой-нибудь клетке, нельзя. После того, как вся таблица заполнена, в каждой строке закрашивают чёрным клетку с наибольшим числом. Оля выигрывает, если можно провести ломаную, соединяющую верхнюю сторону таблицы с нижней стороной и лежащую целиком в чёрных клетках; иначе выигрывает Катя. Кто выиграет при правильной игре?

7. Натуральные числа a и b таковы, что числа $2a - 1$, $2b - 1$ и $a + b$ — простые. Докажите, что ни $a^b + b^a$, ни $a^a + b^b$ не делятся на $a + b$.

8. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $AD = CD$. Точка P на стороне AB и точка Q на стороне BC таковы, что $\angle ADC = 2\angle PDQ$. Отрезки DH и DM являются соответственно высотой и медианой треугольника PDQ. Точка $K \neq H$ на прямой PQ такова, что $KM = MH$. Докажите, что $DM \parallel BK$.

9. Вершины графа занумерованы натуральными числами от 1 до 105, причём каждое натуральное число встречается ровно один раз. Известно, что в этом графе нет циклов из четырёх вершин. Докажите, что существует арифметическая прогрессия из пяти не превосходящих 105 натуральных чисел такая, что никакие две вершины с номерами из этой прогрессии не соединены ребром.

10. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(1) = 1$, а также для любых x и y

$$f(x + y) = 2^x f(y) + 3^y f(x).$$