ЦПМ
Группа 9-1

Заключительный геомразнобой
Разбор

Teacher:
Ilya Bogdanov

Moscow 2020

1. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1. Точка A^* — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1, CC_1. Аналогично определяются точки B^* и C^*. Оказалось, что точки A^*, B^*, C^* лежат внутри углов BAC, ABC, BCA соответственно. Докажите, что прямые AA^*, BB^* и CC^* пересекаются в одной точке.

   Решение. Заметим, что $\triangle A^*B_1C = \triangle A^*BC_1$. Поэтому AA^* — биссектриса $\angle BAC$. Аналогичное верно для BB^* и CC^*. Таким образом, три прямые пересекаются в одной точке, так как являются биссектрисами треугольника ABC.

2. В ромбе $ABCD$ на отрезках AC и BC выбраны точки M и N соответственно, так, что $NM = MD$. Прямая DN пересекает отрезок AC в точке P, а прямая DM пересекает отрезок AB в точке R. Докажите, что $RP = PD$.

   Решение. Рассмотрим точку N', симметричную N относительно AC. Тогда $\angle MDP = \angle MNP = \angle MN'P$. Значит, DMN' вписанный. Знаем, что $MD = MN'$. Следовательно $\angle MDN' = \angle MN'D$. И из вписанности и симметрии $\angle MN'D = \angle MPD = \angle MPB$. Но $\angle MRA = \angle MDN'$ из параллельности. Значит,

$$\angle MPB = \angle MRA$$

   и $MPBR$ вписанный. И, в конце концов,

$$\angle MRP = \angle MBP = \angle MDP \Longrightarrow RP = PD,$$

   Q.E.D.

3. В остроугольном треугольнике проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D, равноудаленная от A_1 и C_1. Докажите, что A, C_1, D и середина AC лежат на одной окружности.

   Решение. Из точек A_1 и C_1 отрезок AC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AC. Середина E стороны AC — центр этой окружности, EA_1 и EC_1 — радиусы, A_1EC_1 — центральный угол, A_1AC_1 — вписанный угол. Поскольку $DA_1 = DC_1$ и $EA_1 = EC_1$, точки D и E лежат на серединном перпендикуляре к отрезку A_1C_1. Поэтому

$$\angle C_1ED = \frac{1}{2}\angle C_1EA_1 = \angle A_1AC_1 = \angle DAC_1$$

   т.е. из точек E и A, лежащих по одну сторону от прямой DC_1, отрезок DC_1 виден под одним и тем же углом. Следовательно, точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности.

4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что если $AI + AC = BC$, то $\angle BAC = 2\angle ABC$.

   Решение. Отметим на BC такую точку D, что $CA = CD$. Тогда $AI = ID = DB$. И к тому же $\angle IAB = \angle IDC$. Отсюда $IABD$ вписанный. Более того, у него три стороны равны, значит этот четырехугольник — равнобокая трапеция. Значит,

$$\angle ABC = \angle DBA = \angle IAB = \frac{1}{2}\angle BAC,$$

   что и требовалось.

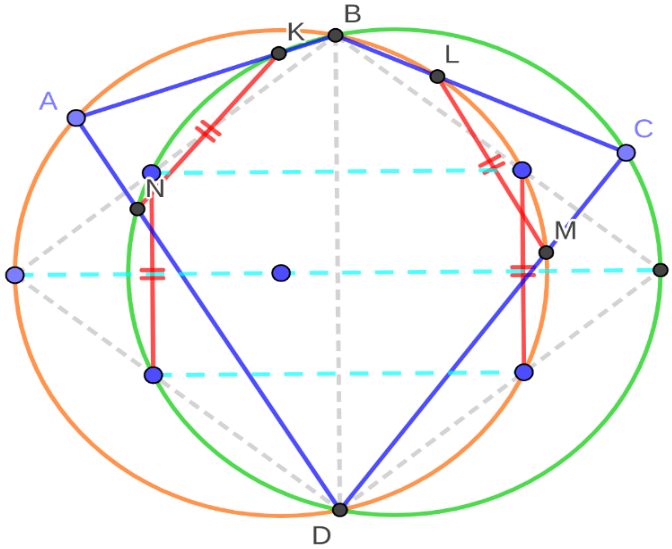

Рис. 1: Задача 5

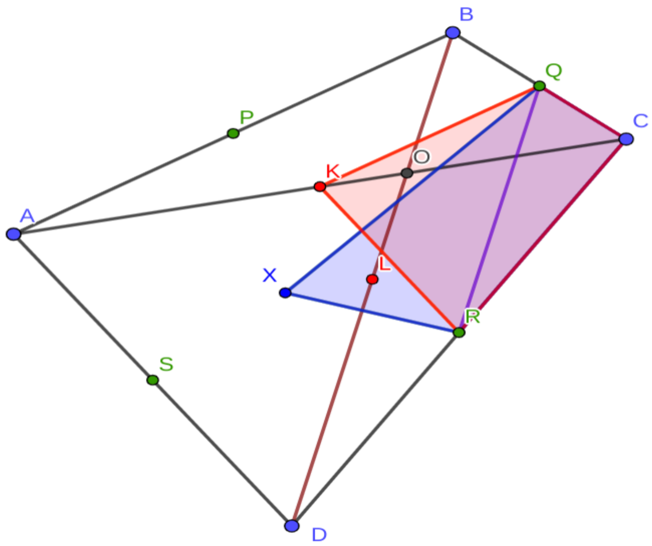

Рис. 2: Задача 6

5. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M, N соответственно. Оказалось, что пятиугольники $ABLMD$ и $BCDNK$ являются вписанными, и $LM = KN$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

   Решение. Обратимся к чертежу. Для удобства объекты буду описывать их цветами, вместо того чтобы плодить буквенные названия. Буквы из условия указаны на чертеже. Рассмотрим движение точки C по зеленой окружности. Так как $\angle BCD$ остается неизменным и дуга BAD, очевидно, тоже, то угол стягиваемый красным отрезком тоже не меняется, ибо он равен разности предыдущих двух углов. Значит, и длина красного отрезка не меняется. Аналогичное верно и для движения A по рыжей окружности.
   Нам надо доказать равенство $\angle BAC = \angle BCA$. При движении оба угла не меняются. Поэтому достаточно доказать равенство углов для какого-нибудь частного случая. Самый удобный — случай, когда AC является серединным перпендикуляром к BD. Этот случай уже тривиален: если в дельтоид вписан прямоугольник со сторонами, параллельными диагоналям, то этот дельтоид — ромб. Отсюда следует нужное равенство углов.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно, а точки K, L — середины диагоналей AC и BD соответственно. Диагонали пересекаются в точке O. Внутри четырехугольника нашлась такая точка X, что $OKXL$ — параллелограмм. Докажите, что площади четырехугольников $XSAP$, $XPBQ$, $XQCR$ и $XRDS$ равны.

   Решение. Так как $XK \parallel QR$, то $S_{XQCR} = S_{KQCR}$. Последняя площадь равна $S_{CKQ} + S_{CKR}$, то есть четверти площади всего четырехугольника. Аналогично остальные три площади из условия равны той же самой четверти.