9 класс Заключительный геомразнобой 25 мая 2020

1. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точка A^* — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1 и CC_1. Аналогично определяются точки B^* и C^*. Оказалось, что точки A^*, B^*, C^* лежат внутри углов BAC, ABC, BCA соответственно. Докажите, что прямые AA^*, BB^* и CC^* пересекаются в одной точке.

2. В ромбе $ABCD$ на отрезках AC и BC выбраны точки M и N соответственно, так, что $NM = MD$. Прямая DN пересекает отрезок AC в точке P, а прямая DM пересекает отрезок AB в точке R. Докажите, что $RP = PD$.

3. В остроугольном треугольнике проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D, равноудаленная от A_1 и C_1. Докажите, что A, C_1, D и середина AC лежат на одной окружности.

4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что если $AI + AC = BC$, то $\angle BAC = 2\angle ABC$.

5. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M, N соответственно. Оказалось, что пятиугольники $ABLMD$ и $BCDNK$ являются вписанными, и $LM = KN$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно, а точки K и L — середины диагоналей AC и BD соответственно. Диагонали пересекаются в точке O. Внутри четырехугольника нашлась такая точка X, что $OKXL$ — параллелограмм. Докажите, что площади четырехугольников $XSAP$, $XPBQ$, $XQCR$ и $XRDS$ равны.

9 класс Заключительный геомразнобой 25 мая 2020

1. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точка A^* — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1 и CC_1. Аналогично определяются точки B^* и C^*. Оказалось, что точки A^*, B^*, C^* лежат внутри углов BAC, ABC, BCA соответственно. Докажите, что прямые AA^*, BB^* и CC^* пересекаются в одной точке.

2. В ромбе $ABCD$ на отрезках AC и BC выбраны точки M и N соответственно, так, что $NM = MD$. Прямая DN пересекает отрезок AC в точке P, а прямая DM пересекает отрезок AB в точке R. Докажите, что $RP = PD$.

3. В остроугольном треугольнике проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D, равноудаленная от A_1 и C_1. Докажите, что A, C_1, D и середина AC лежат на одной окружности.

4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что если $AI + AC = BC$, то $\angle BAC = 2\angle ABC$.

5. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M, N соответственно. Оказалось, что пятиугольники $ABLMD$ и $BCDNK$ являются вписанными, и $LM = KN$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно, а точки K и L — середины диагоналей AC и BD соответственно. Диагонали пересекаются в точке O. Внутри четырехугольника нашлась такая точка X, что $OKXL$ — параллелограмм. Докажите, что площади четырехугольников $XSAP$, $XPBQ$, $XQCR$ и $XRDS$ равны.