ЦПМ
Группа 9-1

Скрытый граф
Разбор

Teacher:
Ilya Bogdanov

Moscow 2020

1. Среди 100 болельщиков некоторые (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое наименьшее количество вопросов это наверняка можно сделать?

   Решение. Ответ: 99.
   Пример:
   Выделим одного болельщика, а затем зададим вопрос про каждую из пар [выделенный болельщик; один из оставшихся 99]. Всех, кто болеет за одну команду с выделенным сажаем в первый автобус, кто за другую — во второй автобус. Очевидно, что рассадка будет правильной.

   Оценка:
   Составим граф, в котором вершины соответствуют болельщикам ребро будет проведено между двумя болельщиков, если про данную пару был задан вопрос. Если граф не связен, то в одной непустой компоненте связности можно заменить любимую команду каждого болельщика на противоположную, и результаты сравнений не изменятся. Отсюда следует, что в одном автобусе не может быть болельщиков из разных компонент. Значит, компонент всего две и каждая сидит полностью в одном автобусе. Но тогда не было ни одного сравнения с ответом «да». Очевидно, случаи, когда есть хотя бы один ответ «нет» существуют $\Longrightarrow$ компонента связности всего одна, а значит ребер хотя бы размер компоненты минус один, то есть 99.

2. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем *ладейно связным*, если из каждой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

   Решение. Рассмотрим граф с вершинами, соответствующими клеткам. Ребро проводится, если из одной клетки можно попасть в другую ходом ладьи. По условию, такой граф связен. Рассмотрим остовное дерево этого графа. Если есть висячая вершина с родителем, у которого она – единственный потомок (в дереве), то мы можем удалить висячую вершину вместе с потомком, а остальную (связную!) часть графа разбить на пары по предположению индукции.

   Если есть три висячих вершины с одним родителем, то две из них связаны ходом ладьи, и мы их можем удалить, а остальное (связное!) разбить на пары по предположению индукции.

   Оставшийся случай — у родителя каждой висячей вершины ровно два сына, и две висячие вершины находятся одна в строке, другая в столбце с родителем (иначе обеих можно удалить). Рассмотрим одного такого родителя, у которого есть родитель, то есть «дед» для висячих (очевидно, найдется такой). Тогда «дед» будет либо в одном столбце, либо в одной строке с одним из внуков. Тогда мы можем удалить оставшегося внука с отцом, граф останется связным, и мы опять применим предположение индукции.

   База индукции очевидна.

3. У сломанного циркуля нельзя изменить расстояние между концами ножек. Пете удалось поставить циркуль так, что его концы оказались в двух узлах клетчатой бумаги. Петя шагает циркулем, поочередно оставляя одну ножку на бумаге, а другую

переноса в новый узел. Может ли Петя в каком-то случае вернуть циркуль в исходные точки так, чтобы ножки поменялись местами?

Решение. Заметим, вопрос задачи можно переформулировать как «можно ли, сдвигаясь на вектор фиксированной длины нечетное число раз и не покидая целые точки, вернуться в исходную точку». **Ответ: нет.**
Обозначим квадрат длины вектора за L, а также за a_i и b_i обозначим координаты i-ого сдвига. Пусть $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = \ldots = a_{2n+1}^2 + b_{2n+1}^2 = L$ и $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} a_i = \sum\limits_{i=1}^{2n+1} b_i = 0$. Рассмотрим случаи.

- L делится на 4. Тогда для любого i оба числа a и b делятся на 2. Тогда перейдем к сетке с единицей, равной двум в исходной. Концы циркуля при обходе останутся в целых точках, и мы можем применить предположение индукции (скажем, индукция по длине L в единицах сетки)
- L нечетно. Тогда ровно одно из чисел в паре a_i, b_i нечетно. Тогда $0 = \sum\limits_{i=1}^{2n+1} a_i + \sum\limits_{i=1}^{2n+1} b_i$ нечетен, противоречие.
- L дает остаток 2 при делении на 4. Тогда оба числа в паре a_i, b_i нечетны. Тогда $0 = \sum\limits_{i=1}^{2n+1} a_i + \sum\limits_{i=1}^{2n+1} b_i$ нечетен, противоречие.

Таким образом, мы разобрали все случаи и в каждом пришли к противоречию.

4. В ресторан придут то ли p, то ли q посетителей (p и q — взаимно простые натуральные числа). На какое наименьшее число кусков (не обязательно равных) шеф-повару надо заранее разрезать торт, чтобы его наверняка можно было раздать всем поровну?

Решение. **Ответ:** $p + q - 1$.
Пример:
Разрежем торт на p секторов, потом на q секторов так, чтобы первые разрезы совпадали. Очевидно, в обоих случаях повар сможет разделить торт поровну.
Оценка:
Отправим к повару первую группу из p человек, а затем (при таком же способе разрезания) вторую группу из q человек. Составим двудольный граф из $p + q$ вершин, в одной доле — вершины, соответствующие группе размера p, и в другой доле — вершины, соответствующие группе размера q. Соединим вершины в том случае, если у соответствующих людей есть общий кусок. Допустим граф не связен и есть компонента связности, не являющаяся всем графом. Пускай в левой доле a вершин, в правой — b вершин. Тогда у каждого человека слева $1/p$ от размера торта, а у каждого человека справа — $1/q$. При этом выполнено множество всех кусков слева и справа одно и то же, а значит:

$$a \cdot (1/p) = b \cdot (1/q) \iff aq = bp$$

Но тогда, из взаимной простоты p и q, a кратно p и b кратно q. Значит, компонента – весь граф, противоречие.

5. В таблице $N \times N$, заполненной числами, все строки различны (т.е. любые две строки отличаются хотя бы по одному элементу). Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

Решение. Допустим противное. Тогда при каждом вычеркивании столбца какая-то пара строк будет неотличима. Рассмотрим граф, в котором вершинами являются строки. Для каждого столбца проведем ребро между двумя строками (выберем ровно одну такую пару!), что при вычеркивании этого столбца они неотличимы. Тогда в графе хотя N ребер и существует цикл. Если есть цикл, то значит, что последовательными изменениями одного числа в строке без повторения позиции, на которой произошло изменение, можно получить из исходной строки её же. Очевидно, это невозможно, так как на каждой позиции из тех, на которых происходили изменения, изменение произошло ровно один раз. То есть, на этих позициях у исходной строки и у итоговой стоят разные числа, противоречие.

6. Гидры состоят из голов и шей (каждая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A; гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить её на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более чем N ударов.

   Решение. **Ответ:** $n = 10$.
   Перейдём к графу, в котором головы – вершины, шеи – ребра, а удар по шеям, выходящим из головы A назовём *инвертированием* вершины A. Если есть вершина X степени не больше 10, то достаточно инвертировать её соседей, и она отделится. Если есть вершина, соединённая со всеми вершинами, за исключением n ($n \leq 9$), то нужно инвертировать сначала эту вершину, а затем те n вершин, с которыми она вначале не была соединена, и тогда эта вершина отделится. Если же каждая вершина соединена хотя бы с 11 и не соединена хотя бы с 10 другими, то всего вершин не меньше 22, и ребер не меньше $22 \cdot 11 : 2 > 100$. Пример гидры, которую нельзя разрубить за девять ударов: две группы по 10 голов и 100 шей, соединяющих все пары голов из разных групп. Заметим, что состояние ребра между вершинами A и B не меняется тогда и только тогда, когда вершины A и B инвертированы в сумме чётное число раз. Поэтому порядок отрубания вершин не важен и бессмысленно инвертировать вершину дважды. Пусть по нашей гидре нанесено не более девяти ударов. Тогда в каждой группе осталось по неинвертированной голове, и поэтому есть шея из одной группы в другую; более того, все неинвертированные головы образуют связное множество. С другой стороны, каждая неинвертированная голова связана со всеми инвертированными в своей группе. Поэтому, если в каждой части инвертировано хотя бы по одной голове, то гидра осталась связной. Если же все инвертированные головы в одной части, то гидра тоже осталась связной: каждая неинвертированная голова в этой части связана со всей другой частью и со всеми инвертированными.

7. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток *эквивалентны*, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

   Решение. Рассмотрим двудольный граф, вершинами которого являются строки и столбцы данной доски, причём строка и столбец соединены ребром тогда и только тогда, когда клетка на их пересечении отмечена. Заметим, что перестановки строк и перестановки столбцов исходной таблицы соответствуют перенумерациям вершин в каждой из долей получившегося графа. Это значит, что эквивалентным расположениям соответствуют изоморфные графы, а неэквивалентным – неизоморфные. Таким образом, число неэквивалентных расположений отмеченных клеток равно числу неизоморфных графов, соответствующих каким-нибудь расположениям. Посмотрим, какие графы соответствуют каким-нибудь расположениям отмеченных клеток. Во-первых, в каждой доле этого графа должно быть по 11 вершин (доля строк и доля столбцов). Во-вторых, степень каждой вершины равна 2, а значит, граф распадается на циклы. Так как граф двудольный, то длины этих циклов чётны. Кроме того, так как в графе нет кратных рёбер, то длина каждого такого цикла не меньше четырёх. Изоморфизм двух таких графов равносилен совпадению у них набора длин циклов. Следовательно, искомое число равно количеству представлений числа 22 в виде суммы чётных слагаемых, каждое из которых не менее четырёх (суммы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми), то есть количеству представлений числа 11 в виде суммы слагаемых, каждое из которых не меньше 2. Выписав все эти представления, можно убедиться, что их ровно 14.

8. В пространстве расположены $2n$ точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Проведены n^2+1 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведённые отрезки образуют хотя бы n треугольников.

   Решение. :

- Выберем точку, из которой выходит наибольшее число отрезков. Обозначим её через A_1, концы выходящих из нее отрезков — через $B_1, \dots, B_k$, остальные точки — через $A_2, \dots, A_{2n-k}$. Если треугольников нет, то между точками $B_1, \dots, B_k$ нет отрезков, поэтому из каждой из них выходит не более $2n-k$ отрезков. А поскольку из каждой точки A_i $(i = 1, \dots, 2n-k)$ выходит не более k отрезков, общее число отрезков не превосходит $\frac{1}{2}(k(2n-k)+(2n-k)k) = k(2n-k) \leq n^2$. Противоречие.
- Проведём доказательство индукцией по n.
  База. При $n = 2$ (4 точки и 5 отрезков) утверждение проверяется непосредственно.
- **Шаг индукции**. Пусть имеется $2n+2$ точки и $(n+1)^2+1$ отрезков. Согласно предыдущему параграфу, проведённые отрезки образуют хотя бы один треугольник ABC. Нужно еще n треугольников. Обозначим количества отрезков, выходящих из вершин треугольника ABC (не считая его сторон), через k_A, k_B, k_C соответственно. Если $k = k_A+k_B+k_C \leq 3n-2$, то для каких-то двух вершин треугольника, например A и B, общее число таких отрезков k_A+k_B не больше $2n-2$. Выбросим эти точки и все выходящие из них отрезки (вместе со сторонами треугольника ABC). Мы получим набор из точек, соединённых не менее чем $(n+1)^2+1-(2n-2)-3 = n^2+1$ отрезками, которые по предположению индукции образуют не менее n треугольников. Если же $k \geq 3n-1$ и k рассматриваемых нами отрезков образуют со сторонами AB, BC и CA t треугольников, то $t \geq n$. В самом деле, пусть среди $2n+2-3 = 2n-1$ точек, отличных от A, B, C, имеется n_j таких, из которых идёт j отрезков к вершинам A, B, C, $(j = 0, 1, 2, 3)$. Тогда $n_1+n_2+n_3 \leq n_0+n_1+n_2+n_3 = 2n-1, n_1+2n_2+3n_3 = k \geq 3n-1$, следовательно, $t = n_2+3n_3 \geq n_2+2n_3 \geq (3n-1)-(2n-1) \geq n$.