9 класс

Скрытый граф

21 мая 2020

1. Среди 100 болельщиков некоторые (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое наименьшее количество вопросов это наверняка можно сделать?

2. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем *ладейно связным*, если из каждой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

3. У сломанного циркуля нельзя изменить расстояние между концами ножек. Пете удалось поставить циркуль так, что его концы оказались в двух узлах клетчатой бумаги. Петя шагает циркулем, поочередно оставляя одну ножку на бумаге, а другую перенося в новый узел. Петя утверждает, что он вернул сломанный циркуль в исходные точки, но ножки оказались поменяны местами. Не обманывает ли он?

4. В ресторан придут то ли p, то ли q посетителей (p и q — взаимно простые натуральные числа). На какое наименьшее число кусков (не обязательно равных) шеф-повару надо заранее разрезать торт, чтобы его наверняка можно было раздать всем поровну?

5. В таблице $N \times N$, заполненной числами, все строки различны (т.е. любые две строки отличаются хотя бы по одному элементу). Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

6. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл *побеждает* гидру, если ему удастся разрубить ее на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую гидру со 100 шеями, нанеся не более N ударов.

7. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток *эквивалентны*, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

8. В пространстве расположены $2n$ точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Проведены $n^2 + 1$ отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведённые отрезки образуют хотя бы n треугольников.

9 класс

Скрытый граф

21 мая 2020

1. Среди 100 болельщиков некоторые (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое наименьшее количество вопросов это наверняка можно сделать?

2. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем *ладейно связным*, если из каждой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

3. У сломанного циркуля нельзя изменить расстояние между концами ножек. Пете удалось поставить циркуль так, что его концы оказались в двух узлах клетчатой бумаги. Петя шагает циркулем, поочередно оставляя одну ножку на бумаге, а другую перенося в новый узел. Петя утверждает, что он вернул сломанный циркуль в исходные точки, но ножки оказались поменяны местами. Не обманывает ли он?

4. В ресторан придут то ли p, то ли q посетителей (p и q — взаимно простые натуральные числа). На какое наименьшее число кусков (не обязательно равных) шеф-повару надо заранее разрезать торт, чтобы его наверняка можно было раздать всем поровну?

5. В таблице $N \times N$, заполненной числами, все строки различны (т.е. любые две строки отличаются хотя бы по одному элементу). Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

6. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл *побеждает* гидру, если ему удастся разрубить ее на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую гидру со 100 шеями, нанеся не более N ударов.

7. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток *эквивалентны*, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

8. В пространстве расположены $2n$ точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Проведены $n^2 + 1$ отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведённые отрезки образуют хотя бы n треугольников.