9 класс — **Метод касательных** — 14 мая 2020

0. Положительные числа a, b, c, d в сумме дают 1. Докажите, что
$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geqslant (a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}.$$

1. Положительные числа a, b, c, d в сумме дают 4. Докажите, что
$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \leqslant \frac{4}{9}.$$

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что
$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} \geqslant 3.$$

3. Для любых положительных чисел a, b, c докажите, что
$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geqslant \frac{3}{5}.$$

4. Положительные числа a, b, c, d таковы, что
$$\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}+\frac{1}{c^3+1}+\frac{1}{d^3+1}=2.$$
Докажите, что
$$\frac{1-a}{1-a+a^2}+\frac{1-b}{1-b+b^2}+\frac{1-c}{1-c+c^2}+\frac{1-d}{1-d+d^2} \geqslant 0.$$

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc=1$. Докажите, что
$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \leqslant 1.$$

6. Положительные числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$ таковы, что $a_2a_3\ldots a_n=1$. Докажите, что
$$(a_2+1)^2\cdot(a_3+1)^3\cdot\ldots\cdot(a_n+1)^n > n^n.$$

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$. Докажите, что
$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$

9 класс — **Метод касательных** — 14 мая 2020

0. Положительные числа a, b, c, d в сумме дают 1. Докажите, что
$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geqslant (a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}.$$

1. Положительные числа a, b, c, d в сумме дают 4. Докажите, что
$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \leqslant \frac{4}{9}.$$

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что
$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} \geqslant 3.$$

3. Для любых положительных чисел a, b, c докажите, что
$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geqslant \frac{3}{5}.$$

4. Положительные числа a, b, c, d таковы, что
$$\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}+\frac{1}{c^3+1}+\frac{1}{d^3+1}=2.$$
Докажите, что
$$\frac{1-a}{1-a+a^2}+\frac{1-b}{1-b+b^2}+\frac{1-c}{1-c+c^2}+\frac{1-d}{1-d+d^2} \geqslant 0.$$

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc=1$. Докажите, что
$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \leqslant 1.$$

6. Положительные числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$ таковы, что $a_2a_3\ldots a_n=1$. Докажите, что
$$(a_2+1)^2\cdot(a_3+1)^3\cdot\ldots\cdot(a_n+1)^n > n^n.$$

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$. Докажите, что
$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$