

1. Внутри равнобедренного треугольника отметили все точки такие, что три проведенные через них чевианы равны. Оказалось, что отмеченных точек — нечетное число. Чему оно может быть равно?

2. Даны многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ с целыми коэффициентами и натуральное k . Рассмотрим многочлен $Q_k(x) = P(\dots P(P(x)) \dots)$ (многочлен P применен k раз). Докажите, что многочлен $Q_k(x) - x$ имеет не более n целых корней.

3. На плоскости нарисована прямая и отмечены две точки по одну сторону от нее. Постройте точку с наименьшей суммой расстояний до этих двух точек и прямой.

4. Прямоугольник назовем *хорошим*, если длина хотя бы одной из его сторон — целое число. Известно, что некоторый прямоугольник разрезан на хорошие прямоугольники. Докажите, что он является хорошим.

5. Дана строка из нулей и единиц длины n . Запишем под ней строку длины $n - 1$, руководствуясь правилом «треугольника Паскаля по модулю 2»: каждое число равно сумме двух чисел, стоящих сверху и по диагонали от данного, взятой «по модулю 2». Аналогично, запишем под полученной строкой строку длины $n - 2$ и т.д., пока не получим треугольник. Ниже приведен пример такого треугольника для исходной строки 1 0 1 1 1:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 0 & \end{array}$$

Для каждой исходной строки определим *терминальную* строку как строку, образованную правой стороной полученного для исходной строки треугольника, если читать снизу вверх. Таким образом, терминальной строкой для 1 0 1 1 1 будет строка 0 1 0 0 1. Сколько существует исходных строк длины n , совпадающих со своими терминальными?

6. Существует ли граф без треугольников, вершины которого нельзя правильно раскрасить в не более чем 2020 цветов?

1. Внутри равнобедренного треугольника отметили все точки такие, что три проведенные через них чевианы равны. Оказалось, что отмеченных точек — нечетное число. Чему оно может быть равно?

2. Даны многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ с целыми коэффициентами и натуральное k . Рассмотрим многочлен $Q_k(x) = P(\dots P(P(x)) \dots)$ (многочлен P применен k раз). Докажите, что многочлен $Q_k(x) - x$ имеет не более n целых корней.

3. На плоскости нарисована прямая и отмечены две точки по одну сторону от нее. Постройте точку с наименьшей суммой расстояний до этих двух точек и прямой.

4. Прямоугольник назовем *хорошим*, если длина хотя бы одной из его сторон — целое число. Известно, что некоторый прямоугольник разрезан на хорошие прямоугольники. Докажите, что он является хорошим.

5. Дана строка из нулей и единиц длины n . Запишем под ней строку длины $n - 1$, руководствуясь правилом «треугольника Паскаля по модулю 2»: каждое число равно сумме двух чисел, стоящих сверху и по диагонали от данного, взятой «по модулю 2». Аналогично, запишем под полученной строкой строку длины $n - 2$ и т.д., пока не получим треугольник. Ниже приведен пример такого треугольника для исходной строки 1 0 1 1 1:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 0 & \end{array}$$

Для каждой исходной строки определим *терминальную* строку как строку, образованную правой стороной полученного для исходной строки треугольника, если читать снизу вверх. Таким образом, терминальной строкой для 1 0 1 1 1 будет строка 0 1 0 0 1. Сколько существует исходных строк длины n , совпадающих со своими терминальными?

6. Существует ли граф без треугольников, вершины которого нельзя правильно раскрасить в не более чем 2020 цветов?