9 класс Гармонические четырёхугольники 27 апреля 2020

Определение. Четырёхугольник $ABCD$ называется *гармоническим*, если он вписанный и для него выполнено $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

1. Докажите, что для вписанного четырёхугольника $ABCD$ следующие условия равносильны.

а) $ABCD$ — гармонический. **б)** BD — симедиана треугольника ABC.

в) Для точки M, середины AC, выполнено $\angle AMB = \angle DCB$.

г) Для точки M, середины AC, выполнено $\angle AMB = \angle AMD$.

д) Касательные в точках B и D к описанной окружности четырёхугольника пересекаются на прямой AC или ей параллельны.

е) Биссектрисы углов A и C пересекаются на диагонали BD.

ё) Некое условие на образ $ABCD$ после инверсии относительно одной из вершин — сформулируйте его сами.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём касательные в точках B и D пересекаются в точке K, лежащей на прямой AC. Прямая, параллельная BK, пересекает прямые BA, BD, BC в точках P, Q, R соответственно. Докажите, что $PQ = QR$.

3. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH.

4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность Ω, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности Ω в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

5. В окружности Ω проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведённая через C и середину AB, вторично пересекает Ω в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая l перпендикулярна BC и проходит через B. Две окружности с общей хордой CD касаются прямой l в точках P и Q. Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.

7. а) В параллелограмме $ABCD$ дана точка M такая, что $\angle MAD = \angle MCD$. Докажите, что $\angle MBA = \angle MDA$.

б) В треугольнике ABC дана точка P такая, что $\angle ACP = \angle ABP$. Точка Q симметрична точке P относительно середины BC. Докажите, что $\angle CAP = \angle BAQ$.

в) Внутри четырёхугольника $ABCD$ дана точка P такая, что $\angle CDP = \angle ABD$, $\angle CBP = \angle ADB$ и $BP = DP$. Докажите, что P лежит на диагонали AC.

8. Касательные в точках A и C к описанной окружности остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке F. Внутри треугольника BFC нашлась такая точка K, что $\angle KFB = \angle KBC = \angle KCF$. Точка L на стороне AB такова, что $\angle LCB = \angle BFC$. Докажите, что прямая BK делит отрезок LC пополам.

9 класс Гармонические четырёхугольники 27 апреля 2020

Определение. Четырёхугольник $ABCD$ называется *гармоническим*, если он вписанный и для него выполнено $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

1. Докажите, что для вписанного четырёхугольника $ABCD$ следующие условия равносильны.

а) $ABCD$ — гармонический. **б)** BD — симедиана треугольника ABC.

в) Для точки M, середины AC, выполнено $\angle AMB = \angle DCB$.

г) Для точки M, середины AC, выполнено $\angle AMB = \angle AMD$.

д) Касательные в точках B и D к описанной окружности четырёхугольника пересекаются на прямой AC или ей параллельны.

е) Биссектрисы углов A и C пересекаются на диагонали BD.

ё) Некое условие на образ $ABCD$ после инверсии относительно одной из вершин — сформулируйте его сами.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём касательные в точках B и D пересекаются в точке K, лежащей на прямой AC. Прямая, параллельная BK, пересекает прямые BA, BD, BC в точках P, Q, R соответственно. Докажите, что $PQ = QR$.

3. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH.

4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность Ω, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности Ω в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

5. В окружности Ω проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведённая через C и середину AB, вторично пересекает Ω в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая l перпендикулярна BC и проходит через B. Две окружности с общей хордой CD касаются прямой l в точках P и Q. Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.

7. а) В параллелограмме $ABCD$ дана точка M такая, что $\angle MAD = \angle MCD$. Докажите, что $\angle MBA = \angle MDA$.

б) В треугольнике ABC дана точка P такая, что $\angle ACP = \angle ABP$. Точка Q симметрична точке P относительно середины BC. Докажите, что $\angle CAP = \angle BAQ$.

в) Внутри четырёхугольника $ABCD$ дана точка P такая, что $\angle CDP = \angle ABD$, $\angle CBP = \angle ADB$ и $BP = DP$. Докажите, что P лежит на диагонали AC.

8. Касательные в точках A и C к описанной окружности остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке F. Внутри треугольника BFC нашлась такая точка K, что $\angle KFB = \angle KBC = \angle KCF$. Точка L на стороне AB такова, что $\angle LCB = \angle BFC$. Докажите, что прямая BK делит отрезок LC пополам.