ЦПМ
Группа 9-1

Гармонические четырехугольники
Разбор

Teacher:
Ilya Bogdanov

Moscow 2020

1. Докажите, что для вписанного четырёхугольника $ABCD$ следующие условия равносильны.
а) $ABCD$ — гармонический.
б) AC — симедиана треугольника ABD.
в) Для точки M, середины AC, выполнено $\angle AMB = \angle DCB$.
г) Для точки M, середины AC, выполнено $\angle AMB = \angle AMD$.
д) Касательные в точках B и D к описанной окружности четырёхугольника пересекаются на прямой AC или ей параллельны.
е) Биссектрисы углов A и C пересекаются на диагонали BD.
ё) Некое условие на образ $ABCD$ после инверсии относительно одной из вершин — сформулируйте его сами.

Решение. **а)** $\leftrightarrow$ **б)** По теореме синусов равенство произведений сторон равносильно равенству
$$sin(\angle ABD) \cdot \sin(\angle BAC) = \sin(\angle CBD) \cdot \sin(\angle BCA).$$
Как вы знаете из предыдущих задач, такое условие на синусы углов определяет симедиану.

в) $\leftrightarrow$ **б)** Используя равнство вписанных углов, получаем, что данное равнство равносильно $\angle ABM = \angle CBD$. Это условие пункта **б)**.

г) $\leftrightarrow$ **б)** Пусть BM пересекает окружность в точке E. Тогда заметим, что BD симедиана тогда и только тогда, когда D и E симметричны относительное серединному первендикуляру к AC. Равенство углов пункта **г** именно этому и равносильно.

д) $\leftrightarrow$ **б)** Достаточно доказать, что симедиана из вершины B треугольника ABC проходит через точку пересечения касательных к двум другим вершинам. Самое красивое решение заключается в следующем: рассмотрим точку, изогонально сопряженную относительно треугольника ABC точке пересечения касательных P. Это точкой будет точка P', дополняющая треугольник до параллелограмма $ABCP'$. Тогда медиана треугольника ABC проходит через P'. Это равносильно тому, что симедиана AD проходит через P.
Но можно и посчитать по теореме Чевы в синусах, используя формулу для синусов, приведенную выше.

е) $\leftrightarrow$ **а)** Пересечение биссектрис на диагонали равносильно по свойству биссектримы тому, что $AB/AD = CB/CD$. Отсюда равносильность пукнту **а)**.

ё) $\leftrightarrow$ **а)** После инверсии относительно вершины A точки B', C', D' лежат на одной прямой, причем D' – середина $B'C'$.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём касательные в точках B и D пересекаются в точке K, лежащей на прямой AC. Прямая, параллельная BK, пересекает прямые BA, BD, BC в точках P, Q, R соответственно. Докажите, что $PQ = QR$.

Решение. Прямая AC проходит через точку пересечения касательных $\Rightarrow$ четырехугольник $ABCD$ гармонический. Счет углов показывает, что для угла $\angle ANC$ прямые PR и AC антипараллельны. После замены в треугольнике стороны на антипараллельную, симедиана из противоположной вершины исходного треугольника становится медианой для нового. Поэтому AC делит PR пополам.

3. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH.

Решение. По свойству симедианы получаем, что AC – симедиана для TAB. Из подобия ABT и AHT получаем, что для угла $\angle BAT$ прямые TH и TB антипараллельны. Отсюда симедиана для ABT – медиана для ATH и AP делит TH пополам.

4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность Ω, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности Ω в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

   Решение. Счет углов показывает, что для угла ABC прямые AC и EF антипараллельны. Из свойств семедианы, BP – симедиана треугольника EBF. Значит, BP – медиана ABC, что и требовалось.

5. В окружности Ω проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведённая через C и середину AB, вторично пересекает Ω в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

   Решение. Достаточно доказать, что четырехугольник $AEBD$ гармонический. Тогда утверждение задачи гарантируется задачей **1.г)**.

   Пусть M – середина AB. Тогда, из симметрии, медиана DM пересекает окружность в точке, симметричной E относительно середины дуги AB. Значит, DE это симедиана ABD и $AEBD$ гармонический, что и требовалось.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая l перпендикулярна BC и проходит через B. Две окружности с общей хордой CD касаются прямой l в точках P и Q. Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.

   Решение. Обратитесь к чертежу. Пусть D' дополняет CDA до параллелограмма. Достаточно доказать, что зеленый четырехугольник гармонический, далее работает первая задача. Заметим, что из симметрии $\angle PCQ = \angle PD'Q$. Так как $\angle PCQ + \angle PDQ = 180^o$, то и $\angle PDQ + \angle PDQ = 180^o \Rightarrow$ зеленый четырехугольник вписанный.

   Заметим, что CD делит PQ пополам (простой факт на подобие/степень точки/радикальные оси). Из симметрии $D'A$ делит PQ пополам $\Rightarrow DA'$ – медиана $PD'Q$. Осталось записать: $\angle PD'A =$ [из симметрии] $= \angle PCD = \angle DPQ =$ [из вписанности] $= \angle DD'Q$. Так как $D'A$ – медиана $PD'Q$, то $D'D$ симедиана и зеленый четырехугольник гармонический.

7. **а)** В параллелограмме $ABCD$ дана точка M такая, что $\angle MAD = \angle MCD$. Докажите, что $\angle MBA = \angle MDA$.
   б) В треугольнике ABC дана точка P такая, что $\angle ACP = \angle ABP$. Точка Q симметрична точке P относительно середины BC. Докажите, что $\angle CAP = \angle BAQ$.
   в) Внутри четырхугольника $ABCD$ дана точка P такая, что $\angle CDP = \angle ABD$, $\angle CBP = \angle ADB$ и $BP = DP$. Докажите, что P лежит на диагонали AC.

   Решение. **а)** Достаточно достроить треугольник ABM до нераллелограмма ABM и далее посчитать углы.

   Замечание. Задача также легко считается в синусах.

   б) Достаточно достроить треугольник BAC до параллелограмма $BACD$ и воспользоваться предыдущим пунктом для точки P внутри параллельграмма $BACD$. Далее посчитать углы.

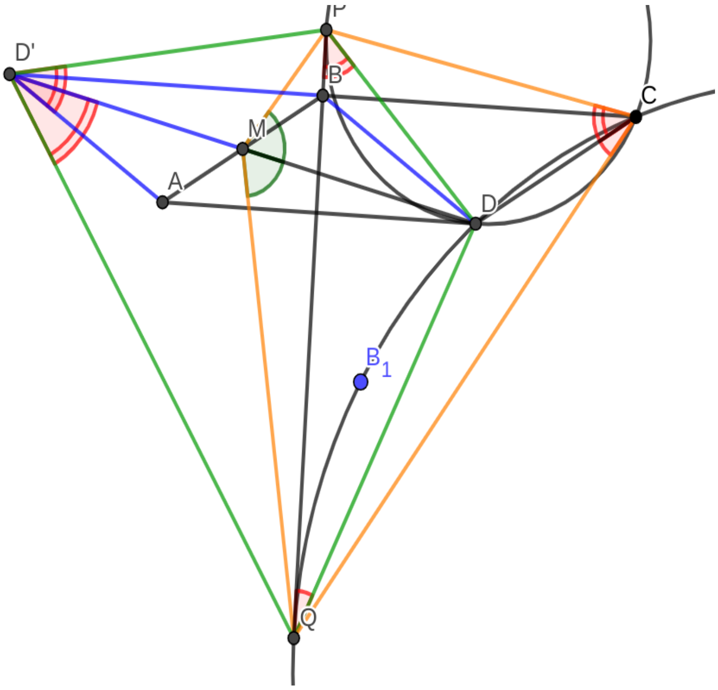

Рис. 1: Задача

в) Рассмотрим точку P', изогонально сопряженную точке P относительно треугольника ABD. Тогда $DP'BC$ – параллелограмм, и, более того, $\angle ABP = \angle ADP$. По предыдущему пункту, $\angle DAC = \angle BAP'$. Но, так как AP и AP' симметричны относительно DAB, то AP проходит через C, что и требовалось.