9 класс

Симедиана

23 апреля 2020

Определение. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. Пусть BK — симедиана треугольника ABC (точка K лежит на стороне AC). Докажите, что $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$, при этом $\dfrac{\sin\angle ABK}{\sin\angle CBK} = \dfrac{\sin\angle C}{\sin\angle A}$.

2. Точка Q внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABQ = \angle CAQ$, а также $\angle ACQ = \angle BAQ$. Докажите, что AQ — симедиана треугольника ABC.

3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Докажите, что BP — симедиана треугольника ABC.

4. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Окружность, построенная на BO как на диаметре, вторично пересекает описанную окружность треугольника AOC в точке $S \neq O$. Докажите, что BS — симедиана треугольника ABC.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC вовне построены квадраты $ABXY$ и $BCKL$. Прямые XY и KL пересекаются в точке T. Докажите, что BT — симедиана треугольника ABC.

6. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC. Серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_1 и B_1 соответственно. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке R. Докажите, что CR — симедиана треугольника ABC.

7. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает его описанную окружность ω в точке E, а сторону AC — в точке D. Окружность, построенная на отрезке DE как на диаметре, вторично пересекает ω в точке $F \neq E$. Докажите, что BF — симедиана треугольника ABC.

8. Прямая, параллельная стороне BC треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке N и сторону AC в точке M. Прямые BM и CN пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников BPN и CPM пересекаются вторично в точке $Q \neq P$. Докажите, что AQ — симедиана треугольника ABC.

9. В треугольнике ABC высота BH пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точке H', а точка M — середина стороны AC. Описанная окружность треугольника HMH' вторично пересекает ω в точке $X \neq H'$. Докажите, что BX — симедиана треугольника ABC.

Определение. *Точка Лемуана* — это точка пересечения симедиан.

10. а) Докажите, что точка внутри треугольника является точкой Лемуана тогда и только тогда, когда расстояния от неё до сторон пропорциональны длинам этих соответствующих сторон.

б) Докажите, что точка Лемуана — это такая точка внутри треугольника, для которой сумма квадратов расстояний до сторон — наименьшая.

в) Для треугольника ABC обозначим через l_a прямую, проходящую через середину стороны BC и середину высоты, опущенной из вершины A. Аналогично определяются l_b и l_c. Докажите, что прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в точке Лемуана.

9 класс

Симедиана

23 апреля 2020

Определение. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. Пусть BK — симедиана треугольника ABC (точка K лежит на стороне AC). Докажите, что $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$, при этом $\dfrac{\sin\angle ABK}{\sin\angle CBK} = \dfrac{\sin\angle C}{\sin\angle A}$.

2. Точка Q внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABQ = \angle CAQ$, а также $\angle ACQ = \angle BAQ$. Докажите, что AQ — симедиана треугольника ABC.

3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Докажите, что BP — симедиана треугольника ABC.

4. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Окружность, построенная на BO как на диаметре, вторично пересекает описанную окружность треугольника AOC в точке $S \neq O$. Докажите, что BS — симедиана треугольника ABC.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC вовне построены квадраты $ABXY$ и $BCKL$. Прямые XY и KL пересекаются в точке T. Докажите, что BT — симедиана треугольника ABC.

6. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC. Серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_1 и B_1 соответственно. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке R. Докажите, что CR — симедиана треугольника ABC.

7. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает его описанную окружность ω в точке E, а сторону AC — в точке D. Окружность, построенная на отрезке DE как на диаметре, вторично пересекает ω в точке $F \neq E$. Докажите, что BF — симедиана треугольника ABC.

8. Прямая, параллельная стороне BC треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке N и сторону AC в точке M. Прямые BM и CN пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников BPN и CPM пересекаются вторично в точке $Q \neq P$. Докажите, что AQ — симедиана треугольника ABC.

9. В треугольнике ABC высота BH пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точке H', а точка M — середина стороны AC. Описанная окружность треугольника HMH' вторично пересекает ω в точке $X \neq H'$. Докажите, что BX — симедиана треугольника ABC.

Определение. *Точка Лемуана* — это точка пересечения симедиан.

10. а) Докажите, что точка внутри треугольника является точкой Лемуана тогда и только тогда, когда расстояния от неё до сторон пропорциональны длинам этих соответствующих сторон.

б) Докажите, что точка Лемуана — это такая точка внутри треугольника, для которой сумма квадратов расстояний до сторон — наименьшая.

в) Для треугольника ABC обозначим через l_a прямую, проходящую через середину стороны BC и середину высоты, опущенной из вершины A. Аналогично определяются l_b и l_c. Докажите, что прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в точке Лемуана.