9 класс Алгебраический разнобой 16 апреля 2020

1. Дима нарисовал на координатной плоскости графики нескольких многочленов. Докажите, что Игорь может нарисовать график ещё одного многочлена, не пересекающийся с уже нарисованными.

2. Пусть $P(x) = x^6 - x^5 - x^4 - x^2 - x + 505$ и $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Найдите $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$, где z_1, z_2, z_3, z_4 — различные корни многочлена Q.

3. Даны действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$. Докажите, что существует индекс k такой, что $4x_kx_{k+1} - 4x_{k+2}^4 \leqslant 1$. (Считайте, что $x_{2021} = x_1$, $x_{2022} = x_2$.)

4. Многочлен $P(x)$ таков, что уравнение $P(x) = x$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ тоже не имеет действительных корней.

5. Функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ такова, что для любого действительного числа a найдётся число $T > 0$ такое, что $f(a) = f(a + Tk)$ при любом целом k. Обязательно ли f — периодическая функция?

6. Докажите, что если многочлен степени k принимает целые значения в $k + 1$ последовательной целой точке, то он принимает целые значения во всех целых точках.

7. В выражении $(1 + x)^{2020}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Сколько получилось коэффициентов, не делящихся на 3?

8. Для положительных чисел a, b, c, d, e найдите наибольшее возможное значение дроби $\dfrac{ab + bc + cd + de}{2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2e^2}$.

9. Даны натуральное число $n \geqslant 2$ и положительные числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие при всех $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ равенству

$$x_{k-1} - x_{k+1} = (x_{k-1} + x_k)(x_k + x_{k+1}).$$

Докажите, что $x_n < \frac{1}{n-1}$.

9 класс Алгебраический разнобой 16 апреля 2020

1. Дима нарисовал на координатной плоскости графики нескольких многочленов. Докажите, что Игорь может нарисовать график ещё одного многочлена, не пересекающийся с уже нарисованными.

2. Пусть $P(x) = x^6 - x^5 - x^4 - x^2 - x + 505$ и $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Найдите $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$, где z_1, z_2, z_3, z_4 — различные корни многочлена Q.

3. Даны действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$. Докажите, что существует индекс k такой, что $4x_kx_{k+1} - 4x_{k+2}^4 \leqslant 1$. (Считайте, что $x_{2021} = x_1$, $x_{2022} = x_2$.)

4. Многочлен $P(x)$ таков, что уравнение $P(x) = x$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ тоже не имеет действительных корней.

5. Функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ такова, что для любого действительного числа a найдётся число $T > 0$ такое, что $f(a) = f(a + Tk)$ при любом целом k. Обязательно ли f — периодическая функция?

6. Докажите, что если многочлен степени k принимает целые значения в $k + 1$ последовательной целой точке, то он принимает целые значения во всех целых точках.

7. В выражении $(1 + x)^{2020}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Сколько получилось коэффициентов, не делящихся на 3?

8. Для положительных чисел a, b, c, d, e найдите наибольшее возможное значение дроби $\dfrac{ab + bc + cd + de}{2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2e^2}$.

9. Даны натуральное число $n \geqslant 2$ и положительные числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие при всех $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ равенству

$$x_{k-1} - x_{k+1} = (x_{k-1} + x_k)(x_k + x_{k+1}).$$

Докажите, что $x_n < \frac{1}{n-1}$.