1. При каких натуральных n число $n^{10}+n^5+1$ является простым?

Решение. Заметим, что $n^{10}+n^5+1=(n^2+n+1)(n^8-n^7+n^5-n^4+n^3-n+1)$, откуда

$$(n^2+n+1) \mid (n^{10}+n^5+1).$$

Ясно, что при $n>1$ выполнено: $1<n^2+n+1<n^{10}+n^5+1$. Отсюда $n^{10}+n^5+1$ является простым только при $n=1$.

Замечание. Догадаться до указанной делимости можно, вспомнив следующую задачу.

Докажите, что многочлен $x^a+x^b+x^c$ делится на многочлен x^2+x+1, если a,b,c дают попарно различные остатки по модулю 3. (Эта задача решается, например, так: $x^2+x+1=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)$, где $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — корень 3-ей степени из единицы. Нетрудно понять, что ε и ε^2 — корни многочлена $x^a+x^b+x^c$).

2. Дано нечетное натуральное число $n>1$. На доске записаны числа $n,n+1,n+2,\ldots,2n-1$. Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел.

Решение. Вычислим: $S=n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(2n-1)=\frac{(3n-1)n}{2}$.

Пусть $x,y,z\in\{n,n+1,n+2,\ldots,2n-1\}$. Заметим, что если оба числа $S-x$ и $S-y$ делятся на z, то $x-y$ делится на z, что возможно только при $x=y$.

Предположим, что условие задачи не выполняется. Тогда при удалении каждого числа сумма оставшихся делится на какое-то из чисел $n,n+1,n+2,\ldots,2n-1$, причем (как отмечено выше) при удалении разных чисел делители также будут разными. Значит, каждое из чисел $S-x$ (где $x\in\{n,n+1,n+2,\ldots,2n-1\}$) должно делиться ровно на одно из чисел $n,n+1,n+2,\ldots,2n-1$.

Заметим, однако, что это неверно при $x=n$:

$$S-n=\frac{3(n-1)n}{2},$$

это делится на n и на $\frac{3(n-1)}{2}$, причем ясно, что если $n>3$, то $n<\frac{3(n-1)}{2}<2n$.

Случай $n=3$ легко разбирается: из чисел $3,4,5$ можно стереть 5.

3. Докажите, что существует бесконечно много таких пар различных натуральных чисел a и b, что наборы простых делителей у чисел a и b одинаковы, а также наборы простых делителей у чисел $a-1$ и $b-1$ одинаковы.

Решение. Возьмем $a=2^k-1$, $b=a^2$ (считаем, что k натуральное число, большее единицы). Очевидно, что наборы простых делителей у чисел a и b одинаковы. Заметим, что

$$b-1=a^2-1=(a-1)(a+1)=(a-1)\cdot 2^k.$$

Поскольку $a-1$ четно, видно, что и у чисел $a-1$ и $b-1$ наборы простых делителей одинаковы.

4. На плоскости нарисована окружность радиуса 1. Можно ли на ней выбрать 2020 точек так, чтобы длины всех попарных расстояний между ними были рациональны?

Решение. Нам пригодится следующая лемма.

Лемма. Существует бесконечно много примитивных (т.е. непропорциональных) пифагоровых троек, то есть таких троек (a,b,c) натуральных чисел, что $a^2+b^2=c^2$.

Доказательство. Достаточно положить $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$, где $m>n$ — взаимно простые натуральные числа разной четности (как известно, все примитивные пифагоровы тройки так задаются). Ясно, что по фиксированное пифагоровой тройке числа m,n восстанавливаются однозначно. $\square$

Рассмотрим 2020 разных прямоугольных треугольников: $\triangle ABC_1,\triangle ABC_2,\ldots,\triangle ABC_{2020}$ — с рациональными катетами и общей гипотенузой AB длины 2 (для определенности будем считать, что вершины $C_1,\ldots,C_{2020}$ лежат в одной полуплосоксти от прямой AC). Каждый из них соответствует своей примитивной пифагоровой тройке (a,b,c), деленной на $c/2$. Тогда их вершины $C_1,C_2,\ldots,C_{2020}$ лежат на единичной окружности. Покажем, что длина отрезка C_iC_j рациональна при всех i,j.

Первый способ. Четыре точки A,B,C_i,C_j лежат на одной окружности (пусть их порядок против часовой стрелки именно такой), поэтому по теореме Птолемея,

$$AB\cdot C_iC_j+AC_j\cdot BC_i=AC_i\cdot BC_j \Longrightarrow C_iC_j=(AC_i\cdot BC_j-AC_j\cdot BC_i)/2 \text{ — рациональное число.}$$

Второй способ. Введем обозначения: $\angle BAC_i =: \alpha_i$. Отметим, что все числа $\cos\alpha_i,\sin\alpha_i$ рациональны (из $\triangle ABC_i$). По теореме синусов для $\triangle AC_iC_j$ имеем:

$$C_iC_j=2\cdot|\sin(\alpha_i-\alpha_j)|=2\cdot|\sin\alpha_i\cos\alpha_j-\cos\alpha_i\sin\alpha_j| \text{ — рациональное число.}$$

Второе решение. (Предложено Олей Касапенко) Рассмотрим 2020 разных прямоугольных треугольников: $\triangle ABC_1, \triangle ABC_2, \ldots, \triangle ABC_{2020}$ — с рациональными сторонами и общим катетом AB длины 2. Каждый из них соответствует своей примитивной пифагоровой тройке (c, b, a), деленной на $c/2$. Тогда их вершины $C_1, C_2, \ldots, C_{2020}$ лежат на прямой, находящейся на расстоянии 2 от точки A.

Сделаем инверсию с центром A и радиусом 2. Обозначим через $C_1', C_2', \ldots, C_{2020}'$ образы точек $C_1, C_2, \ldots, C_{2020}$ соответственно. Они будут лежать на единичной окружности (построенной на AB как на диаметре). Покажем, что длина отрезка $C_i'C_j'$ рациональна при всех i, j. Действительно,

$$\frac{C_i'C_j'}{C_iC_j} = \frac{AC_i'}{AC_j} = \frac{4}{AC_i \cdot AC_j} \Longrightarrow C_i'C_j' = \frac{4 \cdot C_iC_j}{AC_i \cdot AC_j} \text{ — рациональное число.}$$

5. При каких натуральных a и b число $a^3 + b^3 + ab(ab+1)$ является степенью двойки?

Решение. Преобразуем: $a^3+b^3+ab(ab+1) = (a^2+b)(b^2+a)$. Значит, каждая скобка является натуральной степенью двойки. Поэтому числа a и b одной чётности. Можно считать, что $a \geqslant b$. Разберём два случая.

1) $a = b$. Тогда $a^2 + a = a(a+1)$ — степень двойки. Числа a и $a+1$ — степени двойки разной четности, следовательно, $a = b = 1$.

2) $a > b$. Тогда $a^2 + b = 2^m > b^2 + a = 2^n$. Имеем:

$$(2^{m-n} - 1) \cdot 2^n = a^2 - b^2 + b - a = (a-b)(a+b-1).$$

Число $a - b$ чётно, а $a + b - 1$ нечётно, следовательно, $a - b = 2^n = a + b^2$. Противоречие.

6. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих $2n$, можно выбрать так, чтобы ни одно из них не делилось на другое?

Решение. Докажем, что ответом является число n.

Пример. Можно взять числа $n+1, n+2, \ldots, 2n$ — ни одно из них не делится на другое.

Оценка. Представим каждое натуральное a, не превосходящее $2n$, в виде $a = 2^k \cdot m$, где m — нечетно. Заметим, что если среди выбранных чисел найдутся два с одинаковыми нечетными делителями m, то одно из них делится на другое. Остается заметить, что количество нечетных чисел, меньших $2n$, равно n.

Замечание. Оценку можно также доказать индукцией по n. Подумайте, как.

7. Последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такова, что НОД$(a_i, a_j) =$ НОД(i, j) для всех натуральных $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех i.

Решение. Так как каждое a_i делится на НОД$(a_i, a_{2i}) = i$, получаем, что $a_i \,\vdots\, i$ для всех натуральных i.

Предположим, что при некотором i выполняется неравенство $a_i > i$. Тогда, с одной стороны, НОД$(a_{a_i}, a_i) =$ НОД$(a_i, i) = i$. С другой стороны, a_{a_i} делится на a_i, поэтому НОД$(a_{a_i}, a_i) = a_i > i$. Противоречие.

8. Докажите, что $3^n - 2^n$ не делится на n ни для какого натурального $n > 1$.

Решение. Пусть $n \mid (3^n - 2^n)$ для некоторого натурального $n > 1$. Рассмотрим число p — наименьший простой делитель n. Ясно, что $p \neq 2, 3$. Имеем: $2^n \equiv 3^n \pmod p$.

Пусть натуральное число a таково, что $2 \equiv 3a \pmod p$ (иначе говоря, $a \equiv \frac{2}{3} \pmod p$). Тогда $2^n \equiv 3^n a^n \pmod p$, значит, $a^n \equiv 1 \pmod p$. Рассмотрим наименьшее натуральное число k такое, что $a^k \equiv 1 \pmod p$ (*показатель* a по модулю p). Ясно, что $k \mid n$. Отметим, что $k > 1$, иначе $2 \equiv 3 \pmod p$.

Согласно малой теореме Ферма, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, поэтому $k \mid (p-1)$. Следовательно, k — делитель n, меньший p. Это противоречит минимальности p (поскольку у k есть простые делители).