9 класс **Числовой разнобой** 9 апреля 2020

1. При каких натуральных n число $n^{10}+n^5+1$ является простым?

2. Дано нечетное натуральное число $n>1$. На доске записаны числа $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$. Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел.

3. Докажите, что существует бесконечно много пар различных натуральных чисел a и b таких, что наборы простых делителей у чисел a и b одинаковы, причём наборы простых делителей у чисел $a-1$ и $b-1$ тоже одинаковы.

4. На плоскости нарисована окружность радиуса 1. Можно ли на ней выбрать 2020 точек так, чтобы длины всех попарных расстояний между ними были рациональны?

5. При каких натуральных a и b число $a^3+b^3+ab(ab+1)$ является степенью двойки?

6. Дано натуральное n. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих $2n$, можно выбрать так, чтобы ни одно из них не делилось на другое?

7. Последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такова, что для всех натуральных $i \neq j$ верно НОД(a_i, a_j) = НОД(i, j). Докажите, что $a_i = i$ для всех i.

8. При каких натуральных n число 3^n-2^n делится на n?

9 класс **Числовой разнобой** 9 апреля 2020

1. При каких натуральных n число $n^{10}+n^5+1$ является простым?

2. Дано нечетное натуральное число $n>1$. На доске записаны числа $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$. Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел.

3. Докажите, что существует бесконечно много пар различных натуральных чисел a и b таких, что наборы простых делителей у чисел a и b одинаковы, причём наборы простых делителей у чисел $a-1$ и $b-1$ тоже одинаковы.

4. На плоскости нарисована окружность радиуса 1. Можно ли на ней выбрать 2020 точек так, чтобы длины всех попарных расстояний между ними были рациональны?

5. При каких натуральных a и b число $a^3+b^3+ab(ab+1)$ является степенью двойки?

6. Дано натуральное n. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих $2n$, можно выбрать так, чтобы ни одно из них не делилось на другое?

7. Последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такова, что для всех натуральных $i \neq j$ верно НОД(a_i, a_j) = НОД(i, j). Докажите, что $a_i = i$ для всех i.

8. При каких натуральных n число 3^n-2^n делится на n?