9 класс **Инверсия — 3** 30 марта 2020

1. На плоскости взяты шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 Докажите, что если описанные окружности треугольников $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ проходят через одну точку, то и описанные окружности треугольников $A_2B_2C_2$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_1B_1C_2$ тоже проходят через одну точку.

2. Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC, а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Описанная окружность треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром вписанной окружности треугольника PQT.

3. Даны окружность и точка P внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются всевозможные пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите ГМТ пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

Подсказка: рассмотрите инверсию с центром в точке пересечения касательных к паре окружностей.

4. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что $\angle AOE = \angle DOF$.

5. Поризм Штейнера. Докажите, что если существует цепочка окружностей $S_1, S_2, \ldots, S_n$, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1, касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой; в противном случае — внешним и внутренним образом), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

6. Дан треугольник ABC ($BC < AC$). Биссектриса угла C пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Пусть M — точка пересечения серединного перпендикуляра к AC с внешней биссектрисой угла BCA. Докажите, то середина отрезка BC лежит на описанной окружности треугольника CPM.

7. а) Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, S_2 и S_3 — в точках B_1 и B_2, S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2, S_4 и S_1 – в точках D_1 и D_2. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности или прямой, то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности или прямой.

б) Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда $AHBKCLDMEN$. Около треугольников AHB, BKC, CLD, DME, ENA описали окружности. Рассмотрим точки пересечения соседних окружностей. Докажите, что 5 из них, отличные от A, B, C, D, E, лежат на одной окружности.

Подсказка: возможно, вам поможет точка Микеля.

9 класс **Инверсия — 3** 30 марта 2020

1. На плоскости взяты шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 Докажите, что если описанные окружности треугольников $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ проходят через одну точку, то и описанные окружности треугольников $A_2B_2C_2$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_1B_1C_2$ тоже проходят через одну точку.

2. Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC, а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Описанная окружность треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром вписанной окружности треугольника PQT.

3. Даны окружность и точка P внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются всевозможные пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите ГМТ пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

Подсказка: рассмотрите инверсию с центром в точке пересечения касательных к паре окружностей.

4. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что $\angle AOE = \angle DOF$.

5. Поризм Штейнера. Докажите, что если существует цепочка окружностей $S_1, S_2, \ldots, S_n$, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1, касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой; в противном случае — внешним и внутренним образом), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

6. Дан треугольник ABC ($BC < AC$). Биссектриса угла C пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Пусть M — точка пересечения серединного перпендикуляра к AC с внешней биссектрисой угла BCA. Докажите, то середина отрезка BC лежит на описанной окружности треугольника CPM.

7. а) Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, S_2 и S_3 — в точках B_1 и B_2, S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2, S_4 и S_1 – в точках D_1 и D_2. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности или прямой, то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности или прямой.

б) Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда $AHBKCLDMEN$. Около треугольников AHB, BKC, CLD, DME, ENA описали окружности. Рассмотрим точки пересечения соседних окружностей. Докажите, что 5 из них, отличные от A, B, C, D, E, лежат на одной окружности.

Подсказка: возможно, вам поможет точка Микеля.