1. Двум мудрецам написали на лбу по рациональному числу (числа могут быть разные). Каждый из них видит число своего товарища, но не видит своё. У каждого из мудрецов есть своя большая бумажка, на которой он может написать несколько произвольных чисел (всё остальное мудрецам делать запрещено: например, общаться или смотреть в бумажку товарища). Могут ли мудрецы договориться так, чтобы хотя бы один из них выписал на свою бумажку число на своём лбу?

Решение. Как известно, множество $\mathbb{Q}$ счётно. Так что для удобства пусть сначала мудрецы договорятся о едином способе занумеровать все рациональные числа: $q_1, q_2, \ldots$ Таким образом, мы свели задачу к натуральным числам вместо рациональных.

Стратегия для мудрецов подойдёт, например, такая: если мудрец видит на лбу другого мудреца число q_i, то он пишет на своём листке числа $q_1, q_2, \ldots, q_i$. Тогда число на своём лбу угадает мудрец с наименьшим из двух номеров.

Замечание. Можно было обойтись и без счётности. Например, если все дроби представлять в несократимом виде $\frac{p}{q}$, то к успеху бы привела стратегия выписывать все дроби с суммой модулей числителя и знаменателя не большей, чем у другого мудреца.

2. Влад написал олимпиаду из 5 задач, за каждую из которых получил от 0 до 7 баллов. Но он не говорит свои баллы, а преподаватель его кружка Борис Андреевич хочет их угадать. Он пишет последовательность из пяти оценок, а Влад отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. За какое наименьшее количество вопросов преподаватель сможет гарантированно отгадать баллы?

Решение. Вариантов того, какая разбалловка может быть у Влада, ровно $8^5 = 2^{15}$. Поскольку у каждого вопроса возможно всего 2 ответа, Борису Андреевичу понадобится хотя бы 15 вопросов.

За 15 вопросов управиться легко, ведь, чтобы узнать баллы по каждой i-й задаче, понадобится ровно 3 вопроса. Для этого надо указывать последовательность из одних нулей, кроме i-й задачи, а в i-й задаче первым вопросом указать 4, вторым — 2 или 6, третьим — 1,3,5 или 7 (ответу «да»/«нет» соответствует увеличение/уменьшение числа на 2 или на 1 на следующем вопросе).

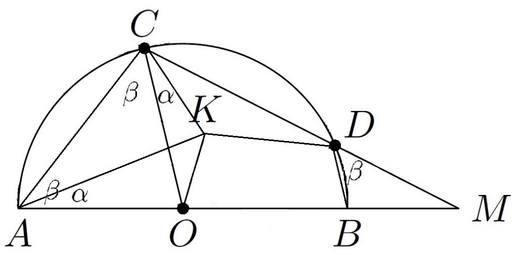
3. Любитель алгебры Ваня с помощью переменных $x_1, x_2, \ldots, x_6$ составил систему из 12 уравнений вида $x_i + x_j + x_k = 0$ (все уравнения — разные, т.е. не получаются друг из друга перестановкой слагаемых). Сколько решений может иметь эта система? Укажите все возможные варианты.

Решение. Очевидно, что $(0, 0, \ldots, 0)$ является решением любой такой системы. Назовём такое решение *тривиальным*. Очевидно, что если есть хотя бы одно нетривиальное решение, то решений бесконечно много. Действительно, все переменные в нетривиальном решении можно домножить на любое действительное $\alpha \neq 0$, и вновь получится нетривиальное решение.

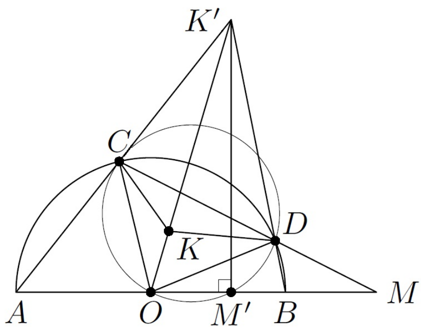
Приведём пример системы, в которой нет нетривиальных решений, т.е. всего одно решение. Пусть первые 4 уравнения имеют вид $x_1 + x_2 + x_i = 0$ при всех $3 \leqslant i \leqslant 6$ (откуда следует, что $x_3 = x_4 = x_5 = x_6$), следующие 3 уравнения имеют вид $x_j + x_5 + x_6 = 0$ при всех $1 \leqslant j \leqslant 3$ (откуда следует, что $x_1 = x_2 = x_3$), ещё одно уравнение имеет вид $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (откуда следует, что есть только тривиальное решение). Оставшиеся 4 уравнения можно брать произвольными из оставшихся возможных.

Приведём пример системы, в которой есть нетривиальное решение, т.е. решений бесконечно много. Пусть все уравнения имеют вид $x_i + x_j + x_k = 0$, где $1 \leqslant i \leqslant 2$, $3 \leqslant j < k \leqslant 6$ (всего уравнений $C_2^1 \cdot C_4^2 = 12$). Очевидно, что $(2, 2, -1, -1, -1, -1)$ является нетривиальным решением такой системы. Поэтому и все шестёрки $(2\alpha, 2\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha)$ являются решениями.

4. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D, а прямую AB — в точке M ($MB < MA$, $MD < MC$). Пусть K — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB. Докажите, что $\angle MKO = 90°$.



Решение 1. Т.к. $OA = OC$ и $AOKC$ — вписанный четырёхугольник, обозначим $\angle KCO = \angle KAO = \alpha$ и $\angle OAC = \angle OCA = \beta$. Из вписанности $ABDC$ получаем $\angle BDM = \beta$, из вписанности $ACKO$ получаем $\angle KOB = \alpha + \beta$, а из вписанности $KOBD$ получаем $\angle KDB = 180° - (\alpha + \beta)$. Но тогда четырёхугольник $AKDM$ является вписанным, т.к. $\angle KAM + \angle KDM = 180°$. Следовательно, $\angle MKO = \angle AKM - \angle AKO = \angle ADM - \angle ACO = \angle ADB + \angle BDM - \angle ACO = 90° + \beta - \beta = 90°$.



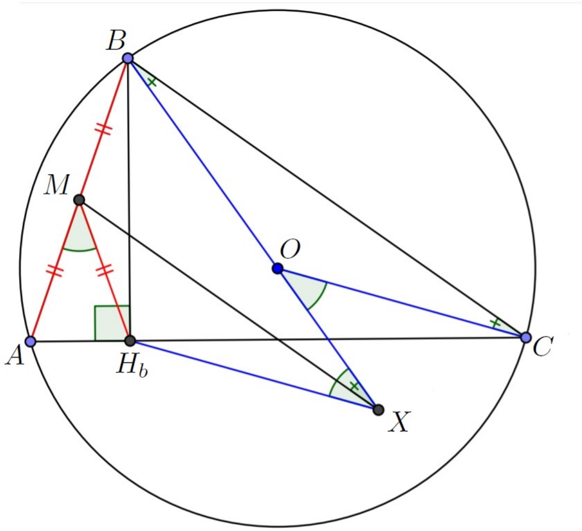
Решение 2. Сделаем инверсию относительно окружности с диаметром AB. Точки A, B, C, D останутся на месте, а точка K перейдет в точку K' пересечения прямых AC и BD. Точка M перейдет в точку M' пересечения окружности (COD) и прямой AB, отличную от O. Окружность (COD) — окружность Эйлера треугольника $AK'B$ (т.к. O — середина AB, C и D — основания высот), поэтому она вторично пересекает AB в точке M' — основании высоты, следовательно, $K'M' \perp AB$. Т.к. $OK \cdot OK' = OM \cdot OM'$, то треугольники OMK и $OK'M'$ подобны и, следовательно, $\angle MKO = 90°$.

5. Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет, причём чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что существует число, являющееся и суммой двух красных, и суммой двух синих.

Решение. Рассмотрим какое-нибудь красное число a. Докажем, что существует красное число $A \geqslant a$ такое, что следом за ним идёт синее число $A+1$. Это очевидно, ведь иначе все натуральные числа, начиная с a, были бы красными, но синих чисел по условию бесконечно много. Выберем теперь синее число $b > A+1$. Аналогично, существует синее число $B \geqslant b$, следом за которым идёт красное число $B+1$. Тогда число $A+B+1 = A+(B+1) = B+(A+1)$ является искомым.

Замечание. По сути, условие равенства сумм двух слагаемых эквивалентно условию равенства разностей. А разности, равные 1, найти легко.

6. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) точка O — центр описанной окружности, BH_b — высота. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.



Решение 1. Пусть M — середина AB. Как известно, $\angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \angle A$. Достаточно понять, что $MX \parallel BC$, или что $\angle MXB = 90^\circ - \angle A$. Заметим, что $\angle H_bXB = \angle XOC = 2\angle OBC = 180^\circ - 2\angle A$. Из треугольника ABH_b получаем $MA = MB = MH_b$ и $\angle BMH_b = \angle MAH_b + \angle MH_bA = 2\angle A$. В четырёхугольнике BMH_bX сумма противоположных углов равна 180°, поэтому он является вписанным. Вписанные углы $\angle BXM$ и $\angle MXH_b$ опираются на равные хорды, поэтому они равны. Отсюда $\angle MXB = \frac{1}{2}\angle BXH_b = 90^\circ - \angle A$, что и требовалось.

Решение 2. Посчитаем в синусах! Все углы на картинке ведь считаются.

Рассмотрим точку N — середину AC. Легко понять, что она лежит внутри треугольника H_bOX. Мы будем доказывать, что $\angle XNC = \angle C$, отсюда и последует, что X лежит на средней линии, параллельной BC (для аналогичных целей можно было рассматривать и точку M из предыдущего решения, но давайте что-то разнообразим). Чтобы посчитать угол $\angle XNC$, найдём в треугольнике H_bXN стороны H_bX и H_bN. Т.к. угол между ними известен, то и два оставшихся угла в этом треугольнике мы найдём.

Пусть R – радиус описанной окружности треугольника ABC, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Из параллельности $\angle XH_bN = \angle NCO = 90^\circ - \beta$. Легко считаются отрезки $AB = 2R\sin\gamma$, $BH_b = 2R\sin\alpha\sin\gamma$, $AH_b = 2R\sin\gamma\cos\alpha$. Также в треугольнике BH_bX посчитаем углы $\angle H_bBO = \angle ABO - \angle ABH_b = (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \alpha) = \alpha - \gamma$ и $\angle H_bXB = 180^\circ - (90^\circ + 90^\circ - \beta + \alpha - \gamma) = 180^\circ - 2\alpha$. По теореме синусов в треугольнике BH_bX имеем

$$H_bX = \frac{BH_b}{\sin\angle H_bXB}\cdot\sin\angle XBH_b = \frac{2R\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}\cdot\sin(\alpha-\gamma) = \frac{R\sin\gamma\sin(\alpha-\gamma)}{\cos\alpha}.$$

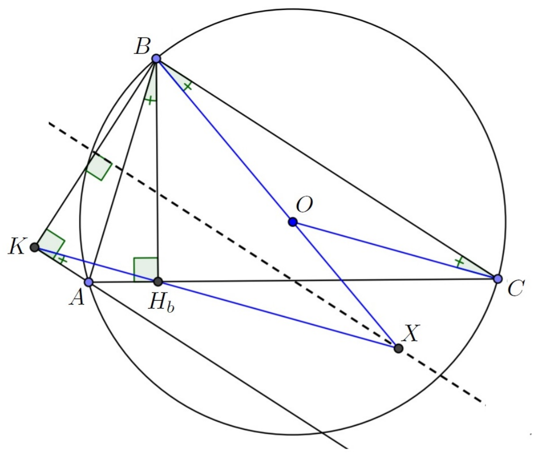
Отрезок H_bN тоже считается несложно:

$$H_bN = \frac{AC}{2} - AH_b = R\sin\beta - 2R\sin\gamma\cos\alpha = R(\sin\beta - 2\sin\gamma\cos\alpha) =$$
$$= R(\sin(\alpha+\gamma) - 2\sin\gamma\cos\alpha) = R\sin(\alpha-\gamma).$$

Значит, в треугольнике H_bXN сумма двух углов $\angle H_bXN$ и $\angle H_bNX$ равна $90^\circ + \beta = 270^\circ - \alpha - \gamma$, а их отношение синусов равно

$$\frac{\sin\angle H_bXN}{\sin\angle H_bNX} = \frac{H_bN}{H_bX} = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin(180^\circ-\gamma)}.$$

Как мы помним по задаче 1 из прошлого листка, по сумме углов и отношению их синусов в треугольнике углы однозначно определяются, поэтому $\angle H_bNX = 180^\circ - \gamma$ и $\angle XNC = \gamma$, что и требовалось.



Решение 3. Пусть K — проекция B на прямую, параллельную BC и проходящую через A. Четырёхугольник $BKAH_b$ вписан в окружность с диаметром AB, поэтому $\angle AKH_b = \angle ABH_b = 90^\circ - \angle A = \angle OBC = \angle OCB$. Это значит, что $KH_b \parallel CO$, тем самым, X — это точка пересечения KH_b и BO. Но прямые KH_b и BO симметричны относительно серединного перпендикуляра m к BK, поэтому X лежит на m. Остаётся заметить, что m — это прямая, содержащая среднюю линию, параллельную BC.

Замечание. А посчитать задачу в комплексных координатах слабо?

7. Антон задумал нечётное натуральное число и выписал все его натуральные делители на доску. Он заметил, что сумма любых двух взаимно простых чисел на доске, уменьшенная на 1, тоже присутствует на доске. Что за число мог задумать Антон?

Решение. Докажем, что число Антона, назовём его n, — это степень простого нечётного числа.

Предположим, это не так. Пусть p — наименьший простой делитель числа n. Представим n в виде $p^m \cdot k$, где k не делится на p. По условию число $l = p + k - 1$ является делителем n. Покажем, что l взаимно просто с k. Предположим противное. Если НОД$(l, k) > 1$, то НОД$(p - 1, k) =$ $=$НОД$(l - k, k) =$ НОД$(l, k) > 1$. Таким образом, число k имеет какой-то делитель d, где $2 \leqslant d \leqslant p - 1$. Противоречие с выбором числа p. Следовательно, $p + k - 1 = p^\alpha$. Ясно, что $\alpha \geqslant 2$, т.к. $k > 1$. Таким образом, числа p^2 и k — взаимно простые делители числа n, т.е. $p^2 + k - 1$ — делитель числа n. При этом $p^2 + k - 1$ взаимно просто с k, поскольку в противном случае k имеет общий делитель с $p^2 - 1 = 2 \cdot (p - 1) \cdot \frac{p+1}{2}$, что снова противоречит выбору числа p. Следовательно, $p^2 + k - 1 = p^\beta$, где $\beta \geqslant 3$. Но тогда $p^\beta = p^2 + k - 1 = p^2 + (p + k - 1) - p = p(p + p^{\alpha-1} - 1)$, что не делится на p^2. Противоречие, следовательно, $k = 1$.

Нетрудно убедиться, что числа вида $n = p^\alpha$ (где p — простое нечётное число) удовлетворяют условию.

Замечание. Идея рассмотрения наименьшего/наибольшего простого делителя порой весьма полезна.