

1. Двум мудрецам написали на лбу по рациональному числу (числа могут быть разные). Каждый из них видит число своего товарища, но не видит своё. У каждого из мудрецов есть своя большая бумажка, на которой он может написать несколько произвольных чисел (всё остальное мудрецам делать запрещено: например, общаться или смотреть в бумажку товарища). Могут ли мудрецы договориться так, чтобы хотя бы один из них выписал на свою бумажку число на своём лбу?

2. Влад написал олимпиаду из 5 задач, за каждую из которых получил от 0 до 7 баллов. Но он не говорит свои баллы, а преподаватель его кружка Борис Андреевич хочет их угадать. Он пишет последовательность из пяти оценок, а Влад отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. За какое наименьшее количество вопросов преподаватель сможет гарантированно отгадать баллы?

3. Любитель алгебры Ваня с помощью переменных x_1, x_2, \dots, x_6 составил систему из 12 уравнений вида $x_i + x_j + x_k = 0$ (все уравнения — разные, т.е. не получаются друг из друга перестановкой слагаемых). Сколько решений может иметь эта система? Укажите все возможные варианты.

4. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D , а прямую AB — в точке M ($MB < MA$, $MD < MC$). Пусть K — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB . Докажите, что $\angle MKO = 90^\circ$.

5. Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет, причём чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что существует число, являющееся и суммой двух красных, и суммой двух синих.

6. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) точка O — центр описанной окружности, BH_b — высота. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO , пересекает прямую BO в точке X . Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

7. Антон задумал нечётное натуральное число и выписал все его натуральные делители на доску. Он заметил, что сумма любых двух взаимно простых чисел на доске, уменьшенная на 1, тоже присутствует на доске. Что за число мог задумать Антон?

1. Двум мудрецам написали на лбу по рациональному числу (числа могут быть разные). Каждый из них видит число своего товарища, но не видит своё. У каждого из мудрецов есть своя большая бумажка, на которой он может написать несколько произвольных чисел (всё остальное мудрецам делать запрещено: например, общаться или смотреть в бумажку товарища). Могут ли мудрецы договориться так, чтобы хотя бы один из них выписал на свою бумажку число на своём лбу?

2. Влад написал олимпиаду из 5 задач, за каждую из которых получил от 0 до 7 баллов. Но он не говорит свои баллы, а преподаватель его кружка Борис Андреевич хочет их угадать. Он пишет последовательность из пяти оценок, а Влад отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. За какое наименьшее количество вопросов преподаватель сможет гарантированно отгадать баллы?

3. Любитель алгебры Ваня с помощью переменных x_1, x_2, \dots, x_6 составил систему из 12 уравнений вида $x_i + x_j + x_k = 0$ (все уравнения — разные, т.е. не получаются друг из друга перестановкой слагаемых). Сколько решений может иметь эта система? Укажите все возможные варианты.

4. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D , а прямую AB — в точке M ($MB < MA$, $MD < MC$). Пусть K — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB . Докажите, что $\angle MKO = 90^\circ$.

5. Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет, причём чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что существует число, являющееся и суммой двух красных, и суммой двух синих.

6. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) точка O — центр описанной окружности, BH_b — высота. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO , пересекает прямую BO в точке X . Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

7. Антон задумал нечётное натуральное число и выписал все его натуральные делители на доску. Он заметил, что сумма любых двух взаимно простых чисел на доске, уменьшенная на 1, тоже присутствует на доске. Что за число мог задумать Антон?