9 класс	Синусы — 2	19 марта 2020

Памятка.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha, \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}; \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}; \quad \sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

1. Докажите, что луч OB внутри угла AOC однозначно восстанавливается по значению величины $\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOC}$.

2. На биссектрисе угла с вершиной A отмечена точка P. Через P проводится прямая, пересекающая стороны угла в точках B и C. Докажите, что величина $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ не зависит от выбора прямой.

3. Дан треугольник ABC. Точка B_1 внутри него такова, что $\angle B_1AC = \frac{\angle A}{3}$, $\angle B_1CA = \frac{\angle C}{3}$. Аналогично определяются точки A_1 и C_1.

а) Пусть $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma$, R — радиус описанной окружности ABC. Докажите, что $AB_1 = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ + \beta)$.

б) Теорема Морлея. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный.

4. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. На стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH — точка E, а на отрезке CH — точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90^\circ$.

5. Прямая l, проходящая через ортоцентр H остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через H перпендикулярно l, пересекает сторону AB треугольника в точке F. Докажите, что $\frac{DH}{HE} = \frac{AF}{FB}$.

6. В треугольнике ABC построена точка D, симметричная центру I вписанной окружности относительно центра O описанной окружности. Докажите равенство $AD^2 = 4R^2 - AB \cdot AC$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

7. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке $A_0 \neq A$. Пусть B_1 и C_1 — середины AC и AB соответственно. Серединные перпендикуляры к AC и AB пересекают прямую AA_0 в точках B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что треугольники $A_0B_1B_2$ и $A_0C_1C_2$ равновелики.

8. Точка X лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что хотя бы один из углов $\angle XAB$, $\angle XBC$, $\angle XCA$ не превосходит 30°.

9 класс	Синусы — 2	19 марта 2020

Памятка.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha, \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}; \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}; \quad \sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

1. Докажите, что луч OB внутри угла AOC однозначно восстанавливается по значению величины $\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOC}$.

2. На биссектрисе угла с вершиной A отмечена точка P. Через P проводится прямая, пересекающая стороны угла в точках B и C. Докажите, что величина $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ не зависит от выбора прямой.

3. Дан треугольник ABC. Точка B_1 внутри него такова, что $\angle B_1AC = \frac{\angle A}{3}$, $\angle B_1CA = \frac{\angle C}{3}$. Аналогично определяются точки A_1 и C_1.

а) Пусть $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma$, R — радиус описанной окружности ABC. Докажите, что $AB_1 = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ + \beta)$.

б) Теорема Морлея. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный.

4. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. На стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH — точка E, а на отрезке CH — точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90^\circ$.

5. Прямая l, проходящая через ортоцентр H остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через H перпендикулярно l, пересекает сторону AB треугольника в точке F. Докажите, что $\frac{DH}{HE} = \frac{AF}{FB}$.

6. В треугольнике ABC построена точка D, симметричная центру I вписанной окружности относительно центра O описанной окружности. Докажите равенство $AD^2 = 4R^2 - AB \cdot AC$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

7. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке $A_0 \neq A$. Пусть B_1 и C_1 — середины AC и AB соответственно. Серединные перпендикуляры к AC и AB пересекают прямую AA_0 в точках B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что треугольники $A_0B_1B_2$ и $A_0C_1C_2$ равновелики.

8. Точка X лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что хотя бы один из углов $\angle XAB$, $\angle XBC$, $\angle XCA$ не превосходит 30°.