1. Имеется набор из n монет, среди которых ровно одна фальшивая и весит легче остальных. В нашем распоряжении имеются *неуверенные двухчашечные весы*, при использовании которых можно определить, на какой из чаш груз не тяжелее, чем на противоположной (в случае равенства грузов на чашах весы могут показать на любую чашу). За какое наименьшее число взвешиваний гарантированно удастся найти фальшивую монету?

Решение. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть теперь $n > 1$.

Пусть k — наименьшее натуральное число такое, что $2^k \geqslant n$ (так называемый *двоичный логарифм* n*, округлённый вверх*). Докажем, что это число k является ответом в задаче.

В силу выбора k, верно $2^{k-1} < n$. Предположим, фальшивую монету можно найти не более чем за $k - 1$ взвешивание. Возможных комбинаций показаний весов не более, чем 2^{k-1} (на каждом этапе мы получаем от весов знак $\geqslant$ или $\leqslant$), а возможных фальшивых монет больше, чем 2^{k-1}. Получаем противоречие, т.к. разным монетам должны соответствовать разные итоговые комбинации показаний весов.

Справиться за k взвешиваний легко. Пусть перед каждым i-м взвешиванием у нас есть $a_i \leqslant 2^{k+1-i}$ *подозрительных* монет (т.е. фальшивая точно находится среди них). Выделим две произвольные кучи по $\left[\frac{a_i}{2}\right]$ монет и положим их на разные чаши. Тогда фальшивая монета либо на чаше, которая не тяжелее другой, либо отложенная, если такая вообще была. Легко убедиться, что в каждом из этих случаев подозрительных монет осталось $a_{i+1} \leqslant 2^{k-i}$. Повторяя эти рассуждения для всех $i = 1, \dots, k$, найдём фальшивую монету.

Вопрос. А сколько взвешиваний понадобилось бы, если бы весы вдобавок к неуверенности были бы ещё и *хлипкими*, т.е. ломались бы, если хотя бы на одной из чаш находилось более одной монеты?

2. Фокусник и его ассистент показывают фокус. Фокусник выходит из зала. Ассистент достаёт колоду из n карт и просит троих зрителей выбрать по одной карте. Посмотрев на выбранные зрителями карты, он добавляет к ним ещё одну из колоды. Зрители тасуют эти четыре карты и зовут фокусника. Он смотрит на четыре карты и угадывает, какую из них выбрал первый зритель, какую — второй, а какую — третий. При каком наименьшем n такой фокус возможен?

Решение. Рассмотрим двудольный граф, одна доля A которого соответствует всем неупорядоченным наборам из 4 карт нашей колоды, а другая доля B — всем упорядоченным наборам из 3 карт. Проведём ребро между вершинами из разных долей, если соответствующие им наборы получаются друг из друга добавлением/удалением одной карты.

Условие задачи эквивалентно тому, чтобы в таком графе существовало паросочетание, покрывающее все вершины B. Для этого необходимо условие $|A| \geqslant |B|$, т.е. $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \geqslant n(n-1)(n-2)$, откуда $n-3 \geqslant 24$ и $n \geqslant 27$.

Убедимся, что $n = 27$ достаточно для существования такого паросочетания. Для этого поймём, что выполняется условие леммы Холла. Рассмотрим любое подмножество $C \subset B$, состоящее из k вершин. Рассмотрим все вершины A, смежные хотя бы с одной вершиной из C. Поскольку из каждой вершины $c \in C$ ведёт в A ровно $n-3$ ребра, то рёбер из C в A ведёт $k(n-3)$, причём в каждую вершину A ведёт не более $4!$ рёбер. Итого, множество всех вершин A, смежных хотя бы с одной вершиной из C, не менее $\dfrac{k(n-3)}{4!} = \dfrac{k \cdot 24}{4!} = k$. Значит, при $n = 27$ условие леммы Холла выполнено, и искомое паросочетание существует. Согласно ему фокусник с ассистентом и будут действовать.

Замечание. Графы — сила!

3. Даны 5 гирь разного веса. За одну операцию можно выбрать упорядоченную тройку гирь (A, B, C) и узнать, верно ли утверждение «$m(A) < m(B) < m(C)$» (где $m(X)$ обозначает вес гири X). Можно ли за 9 таких операций узнать порядок весов гирь?

Решение. Докажем, что за 9 операций узнать порядок нельзя.

Изначально есть $5! = 120$ всевозможных способов упорядочивания гирь. Среди них лишь в $\frac{5!}{3!} = 20$ способах любое утверждение типа «$m(A) < m(B) < m(C)$» будет верным.

Предположим, существует алгоритм, позволяющий управиться за 9 операций. Пусть на первые 4 вопроса нам отвечают, что утверждение неверно. Тогда 4 раза подряд мы отметаем не более, чем по 20 возможных вариантов, и вариантов останется хотя бы $120 - 4 \cdot 20 = 40$. Поскольку каждый из оставшихся 5 вопросов имеет 2 возможных исхода, то мы не сможем различить все оставшиеся $40 > 2^5$ вариантов. Противоречие.

Замечание. Это пример задачи, где очевидной оценки недостаточно: ответы на первые вопросы могут давать слишком мало информации.

4. У Влада есть 100 внешне одинаковых монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых монет. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых различны, причём каждая фальшивая монета тяжелее настоящей. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах Влад сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?

Решение. Покажем, что 70 взвешиваний достаточно. Сложим все 100 монет в кучу. Каждым взвешиванием Влад будет выбирать две монеты из кучи и сравнивать их. Если их массы равны, то обе монеты настоящие, и требуемая монета найдена. Если же нет, то более тяжёлая монета — фальшивая, и её можно выбросить из кучи. Через 70 таких взвешиваний, если равенства никогда не будет, то в куче останется 30 монет, причём все настоящие останутся в куче. Значит, в этом случае Влад даже найдёт все 30 настоящих монет.

Предположим теперь, что у Влада есть алгоритм, позволяющий гарантированно найти настоящую монету не более, чем за 69 взвешиваний. Докажем, что это невозможно — даже в предположении, что массы таковы: масса настоящей монеты равна $\frac{1}{100}$, а масса m_i, i-й фальшивой монеты, равна 2^i. При таком предположении результат любого взвешивания, очевидно, определяется так: если на чашках есть хотя бы одна фальшивая монета, то перевесит чашка, на которой лежит фальшивая с наибольшим номером (поскольку для любого s верно $2^s > 2^{s-1} + 2^{s-2} + \ldots + 30 \cdot \frac{1}{100}$).

Итак, пусть Влад действует по своему алгоритму. Мы будем сообщать ему результаты взвешиваний и присваивать некоторым монетам массы m_i. При этом после каждого взвешивания присвоенными окажутся веса m_{70}, m_{69}, …, m_{70-i} при некотором i. Если соответствующие монеты действительно имеют такие массы (а остальные массы распределены как угодно), то результаты взвешиваний будут такими, как мы сообщили.

При первом взвешивании выберем любую монету на чашках, присвоим ей массу m_{70} и сообщим, что чашка с ней тяжелее. При каждом следующем взвешивании, если на весах уже присутствует монета с присвоенной массой, то мы выберем из таких масс наибольшую и сообщим, что чашка с соответствующей монетой перевесила. Если же никакой монете на весах масса ещё не присвоена, то мы опять выберем любую монету на чашках, присвоим ей наибольшую ещё не присвоенную массу и сообщим, что чашка с ней тяжелее. Нетрудно видеть, что при этом требуемые условия соблюдаются.

Если Влад совершил не более 69 взвешиваний, то не более 69 масс окажутся присвоенными. В частности, m_1 присвоенной не будет. Значит, массу m_1 может иметь любая монета, которой масса ещё не присвоена, и при этом все результаты взвешиваний останутся такими, как мы сообщили. Поэтому Влад не сможет указать на заведомо настоящую монету.