6. Две окружности радиусов r и R касаются прямой l в точках A и B. Пусть C — точка пересечения этих окружностей, наиболее удалённая от l. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC не зависит от положения окружностей.

Решение. Не нарушая общности, точка A принадлежит окружности радиуса r, назовём её ω, а точка B принадлежит окружности радиуса R, назовём её Ω.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Тогда на дугу AC в ω опирается вписанный угол α, поэтому $AC = 2r\sin\alpha$, аналогично $BC = 2R\sin\beta$.

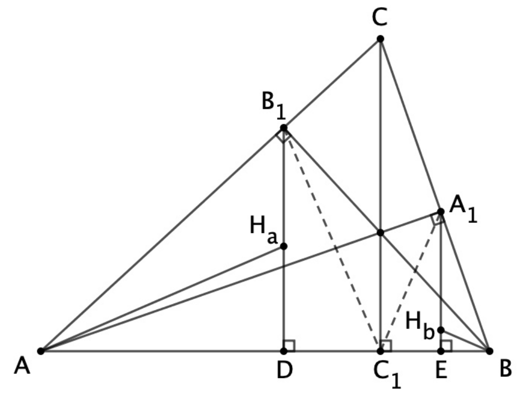
По теореме синусов имеем

$$2R_{ABC} = \sqrt{2R_{ABC}\cdot 2R_{ABC}} = \sqrt{\frac{AC}{\sin\beta}\cdot\frac{BC}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{AC}{\sin\alpha}\cdot\frac{BC}{\sin\beta}} = \sqrt{2r\cdot 2R},$$

что не зависит от положения окружностей.

Замечание. Если надо, чтобы искомый радиус не зависел от положения окружностей, то ясно, что в реальности он зависит только от радиусов исходных окружностей. Поэтому итоговая формула для него не должна содержать какие-то непонятные углы, а только радиусы. Чтобы избавляться от непонятных величин (в данном случае, углов), иногда какие-то отношения надо перемножать. Похожие соображения применяются в задаче 9.

7. AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 равен треугольнику $A_1B_1C_1$.



Решение. Пусть H_a, H_b, H_c — ортоцентры треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно. Докажем равенство $H_aH_b = A_1B_1$, откуда аналогично последуют равенства $H_bH_c = B_1C_1$ и $H_aH_c = A_1C_1$, и искомые треугольники окажутся равны по трём сторонам.

Прямые B_1H_a и A_1H_b перпендикулярны AB, поэтому $B_1H_a \parallel A_1H_b$. Докажем, что $B_1H_a = A_1H_b$, откуда последует, что $H_aH_bA_1B_1$ — параллелограмм, и H_aH_b окажется равен A_1B_1.

Вычислим отрезок B_1H_a. Это можно было бы сделать, использовав вычисления из задачи 1 + подобие треугольников ABC и AB_1C_1 с коэффициентом $\cos\alpha$. Но мы посчитаем его с нуля.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Поскольку четырёхугольник BCB_1C_1 вписан, то $\angle AB_1C_1 = \beta$ и $\angle AC_1B_1 = \gamma$. Поскольку $B_1H_a \perp AC_1$ и $AH_a \perp B_1C_1$, то $\angle B_1AH_a = 90^\circ - \beta$ и $\angle AB_1H_a = 90^\circ - \alpha$.

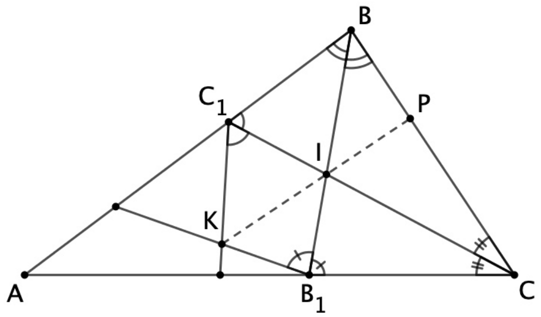
По теореме синусов в треугольнике AB_1H_a имеем

$$B_1H_a = \frac{AB_1}{\sin\angle AH_aB_1}\cdot\sin\angle B_1AH_a = \frac{AB\cos\alpha}{\sin(180^\circ-\gamma)}\cdot\sin(90^\circ-\beta) =$$

$$= \frac{2R\sin\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot\cos\beta = 2R\cos\alpha\cos\beta.$$

Поскольку это выражение симметрично относительно α и β, то и отрезок A_1H_b равен тому же.

8. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая, симметричная прямой AB относительно CI, пересекается с прямой, симметричной прямой AC относительно BI, в точке K. Докажите, что $KI \perp BC$.



Решение. Пусть прямая KI пересекает прямую BC в точке P. Легко понять, что все отмеченные дужками углы на рисунке считаются (т.е. вычисляются через $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$). Поэтому понимание (умение вычислять) угла между KI и BC равносильно пониманию углов, которые прямая KI образует с прямыми BB_1 и CC_1, а также с прямыми KC_1 и KB_1.

В четырёхугольнике KB_1IC_1 мы можем посчитать все углы, а также стороны IC_1 и IB_1. Отсюда можно вычислить и углы $\angle C_1KI$ и $\angle B_1KI$. Покажем, как именно всё это сделать.

Легко понять, что $\angle BC_1C = \angle KC_1C = \alpha + \frac{\gamma}{2}$, $\angle BB_1C = \angle BB_1K = \alpha + \frac{\beta}{2}$.

Посчитаем отрезок IC_1. Это можно было бы сделать, использовав вычисления из задачи 1, но мы посчитаем его с нуля. По теореме синусов в треугольнике BCC_1 имеем $BC_1 = \dfrac{BC}{\sin\angle BC_1C} \cdot \sin\angle BCC_1 = \dfrac{2R\sin\alpha\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}$. Далее, по теореме синусов в треугольнике BIC_1 имеем

$$IC_1 = \frac{BC_1}{\sin\angle BIC_1} \cdot \sin\angle IBC_1 = \frac{2R\sin\alpha\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})\sin(90^\circ-\frac{\alpha}{2})} = \frac{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})},$$

аналогично $IB_1 = \dfrac{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})}$. Следовательно, $\dfrac{IC_1}{IB_1} = \dfrac{\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}$.

Применяя теорему синусов для треугольников KIC_1 и KIB_1, получаем $\dfrac{IC_1}{\sin\angle IKC_1} = \dfrac{KI}{\sin\angle KC_1I}$ и $\dfrac{IB_1}{\sin\angle IKB_1} = \dfrac{KI}{\sin\angle KB_1I}$.

Поделив первое равенство на второе, получим

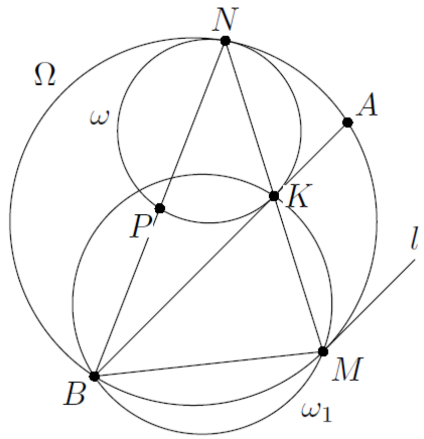
$$\frac{IC_1}{IB_1} \cdot \frac{\sin\angle IKB_1}{\sin\angle IKC_1} = \frac{\sin\angle KB_1I}{\sin\angle KC_1I} = \frac{\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}.$$

С учётом выше найденного $\dfrac{IC_1}{IB_1}$, получаем, что отношение синусов $\dfrac{\sin\angle IKB_1}{\sin\angle IKC_1}$ равно 1, откуда следует, что либо $\angle IKB_1 + \angle IKC_1 = 180^\circ$ (очевидно, это не так), либо $\angle IKB_1 = \angle IKC_1$, т.е. KI — биссектриса угла B_1KC_1, равного $360^\circ - (\alpha+\frac{\gamma}{2}+\alpha+\frac{\beta}{2}+90^\circ+\frac{\alpha}{2}) = 180^\circ - 2\alpha$. Следовательно, $\angle IKB_1 = 90^\circ - \alpha$, откуда $\angle BIP = \angle B_1IK = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \alpha + \frac{\beta}{2}) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, откуда $\angle IPB = 90^\circ$.

Замечание. То, что KI — биссектриса угла B_1KC_1, можно было доказать и проще: точка I лежит на биссектрисах четырёх углов пятиугольника KB_1CBC_1, поэтому лежит и на биссектрисе пятого угла $\angle B_1KC_1$.

Но способ, описанный выше, универсальнее: это пример того, как можно подбираться к неизвестным углам, не находя в картинке скрытые в ней геометрические факты. Найдя отношение синусов углов и зная их сумму, можно однозначно определить сами углы (особенно хорошо, если мы знаем, чему они должны быть равны). Этот факт мы строго докажем в следующем листке про синусы.

9. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M — середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника BMK не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.



Решение. Пусть Ω — это внешняя окружность, ω — внутренняя, а R и r — их радиусы соответственно.

По лемме Архимеда точки N, K, M лежат на одной прямой.

Пусть отрезок BN пересекает ω в точке P. В силу гомотетии ω и Ω с центром N, имеем $\frac{PN}{BN} = \frac{r}{R}$, откуда $\frac{BP}{BN} = \frac{R-r}{R}$. В силу степени точки имеем $BK^2 = BP \cdot BN$.

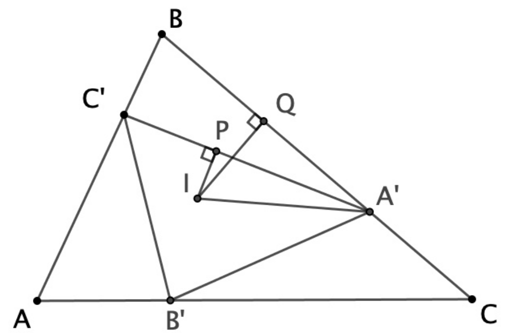
По теореме синусов имеем

$$2R_{BMK} = \frac{BK}{\sin\angle BMK} = \sqrt{\frac{BK^2}{\sin^2\angle BMK}} = \sqrt{\frac{BP \cdot BN}{\sin^2\angle BMK}} =$$

$$= \sqrt{\frac{R-r}{R} \cdot \frac{BN^2}{\sin^2\angle BMK}} = \sqrt{\frac{R-r}{R} \cdot (2R)^2},$$

что не зависит от выбора точки K.

10. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны C', A', B' соответственно. Оказалось, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, а радиус вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ вдвое меньше, чем радиус вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC — правильный.



Решение. Пусть $B'A'C'$ — наибольший угол треугольника $A'B'C'$ (или один из них), он не меньше 60°.

Опустим перпендикуляры из точки I на стороны $A'C'$ и BC (они же радиусы вписанных окружностей) $IP = r$ и $IQ = 2r$. Заметим, что

$$r = IP = IA' \sin\frac{\angle B'A'C'}{2} \geqslant IA' \sin 30^\circ = \frac{IA'}{2} \geqslant \frac{IQ}{2} = r,$$

откуда следует, что оба неравенства должны обращаться в равенства, т.е. $\angle B'A'C' = 60^\circ$ (следовательно, треугольник $A'B'C'$ — правильный, а I — его центр), а также $IA' = IQ$ (следовательно, $IA' \perp BC$). Поскольку треугольник $A'B'C'$ оказался правильным, аналогичные утверждения можно повторить для углов $A'B'C'$ и $A'C'B'$. Тогда $IB' \perp AC$ и $IC' \perp AB$, откуда легко вывести, что и треугольник ABC — правильный.

Замечание. Это был пример геометрической задачи, в которой неожиданно помогают геометрические оценки (привет любителям алгебры!). Да, бывает и такое.