

1. В треугольнике ABC с углами $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ и радиусом описанной окружности R провели все а) высоты; б) биссектрисы. Найдите длины всех отрезков на рисунке.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB' , точка O — центр его описанной окружности. Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO .

3. В треугольнике с тупым углом A проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точки B_1 на прямые BA и BC , равен отрезку, соединяющему проекции точки C_1 на прямые CA и CB .

4. Внутри угла с вершиной O отмечена точка P . Рассматриваются всевозможные пары точек X и Y на сторонах угла такие, что $\angle OPX = \angle OPY$. Докажите, что все прямые XY пересекаются в одной точке.

5. Точка X лежит внутри правильного треугольника ABC . Точки A_1, B_1, C_1 симметричны точке X относительно сторон BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

6. Две окружности радиусов r и R касаются прямой l в точках A и B . Пусть C — точка пересечения этих окружностей, наиболее удалённая от l . Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC не зависит от положения окружностей.

7. AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

8. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Прямая, симметричная прямой AB относительно CI , пересекается с прямой, симметричной прямой AC относительно BI , в точке K . Докажите, что $KI \perp BC$.

9. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке N . Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке K , пересекает внешнюю окружность в точках A и B . Пусть M — середина дуги AB , не содержащей точку N . Докажите, что радиус описанной окружности треугольника BMK не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

10. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны C', A', B' соответственно. Оказалось, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, а радиус вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ вдвое меньше, чем радиус вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что треугольник ABC — правильный.

1. В треугольнике ABC с углами $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ и радиусом описанной окружности R провели все а) высоты; б) биссектрисы. Найдите длины всех отрезков на рисунке.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB' , точка O — центр его описанной окружности. Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO .

3. В треугольнике с тупым углом A проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точки B_1 на прямые BA и BC , равен отрезку, соединяющему проекции точки C_1 на прямые CA и CB .

4. Внутри угла с вершиной O отмечена точка P . Рассматриваются всевозможные пары точек X и Y на сторонах угла такие, что $\angle OPX = \angle OPY$. Докажите, что все прямые XY пересекаются в одной точке.

5. Точка X лежит внутри правильного треугольника ABC . Точки A_1, B_1, C_1 симметричны точке X относительно сторон BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

6. Две окружности радиусов r и R касаются прямой l в точках A и B . Пусть C — точка пересечения этих окружностей, наиболее удалённая от l . Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC не зависит от положения окружностей.

7. AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

8. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Прямая, симметричная прямой AB относительно CI , пересекается с прямой, симметричной прямой AC относительно BI , в точке K . Докажите, что $KI \perp BC$.

9. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке N . Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке K , пересекает внешнюю окружность в точках A и B . Пусть M — середина дуги AB , не содержащей точку N . Докажите, что радиус описанной окружности треугольника BMK не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

10. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны C', A', B' соответственно. Оказалось, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, а радиус вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ вдвое меньше, чем радиус вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что треугольник ABC — правильный.