

Условие. Даны натуральные числа k и d . У неаккуратного лаборанта перепутались пометки пробирок, и среди p его пробирок с препаратами есть одна с ядом. У лаборанта есть k подопытных крыс. Каждый вечер в 17:00 каждой крысе можно сделать инъекцию со смесью содержимого нескольких пробирок. Если среди них была пробирка с ядом, крыса погибнет ровно в 19:30, иначе крыса выживет. Для какого наибольшего p за d дней можно гарантированно выяснить, в какой пробирке яд?

Как решить? Надо вспомнить аналогичную задачу (даунгрейд данной задачи), где за 1 день с помощью 10 крыс надо среди 1000 пробирок найти одну с ядом. Решение там устроено следующим образом.

Закодируем в двоичной системе счисления все пробирки числами длины 10, состоящими из ноликов и единичек (это возможно, т.к. $1000 \leq 2^{10}$; числа могут начинаться с нуля, разумеется). Теперь для каждой пробирки, если i -я цифра её двоичного кода равна 1, то её содержимое дадим i -й крысе (а если 0, то не дадим). Тогда, если j -я крыса погибла, то j -я цифра двоичного кода пробирки с ядом равна 1; а если крыса не погибла, то эта цифра равна 0. Значит, поняв множество погибших крыс, мы восстановим двоичный код пробирки с ядом, т.е. её найдём.

Решение общей задачи. У нас есть p пробирок, k крыс, и надо найти пробирку с ядом за d дней. Ответом в задаче является число $p = (d + 1)^k$.

Оценка. Поймём, какую информацию мы получаем от крыс. Каждая крыса либо умирает в один из d дней, либо вообще не умирает. Поэтому у неё есть $d+1$ вариантов момента гибели. Поскольку крыс k , то всего возможных исходов не более $(d + 1)^k$, по каждому из которых должна однозначно восстанавливаться пробирка с ядом, поэтому $p \leq (d + 1)^k$.

Пример. Закодируем в $(d + 1)$ -ичной системе счисления все пробирки числами длины k , состоящими из цифр — целых чисел от 0 до d включительно (это возможно, т.к. $p = (d + 1)^k$; числа могут начинаться с нуля, разумеется). Теперь для каждой пробирки, если i -я цифра её $(d + 1)$ -ичного кода равна $a_i \neq 0$, то её содержимое дадим i -й крысе в a_i -й день (а если $a_i = 0$, то не дадим).

Тогда, если j -я крыса погибла в s -й день, то j -я цифра $(d + 1)$ -ичного кода пробирки с ядом равна s ; а если крыса не погибла, то эта цифра равна 0. Значит, поняв множество погибших крыс и моменты их гибели, мы восстановим $(d + 1)$ -ичный код пробирки с ядом, т.е. её найдём.