9 класс | Многочлены над $\mathbb{Z}$ | 5 марта 2020

1. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что $P(k)$ делится на $Q(k)$ для любого целого k. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

2. Уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами имеет n различных целых корней. Докажите, что если любые два его корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

3. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для любых действительных чисел a и b число $P(a+b)$ является целым в том и только том случае, когда число $P(a)+P(b)$ является целым.

4. Назовем многочлен *целозначным*, если он во всех целых точках принимает целые значения.

а) Обязательно ли все коэффициенты целозначного многочлена степени n являются целыми числами?

б) Докажите, что если многочлен степени k принимает целые значения в $k+1$ последовательной целой точке, то он целозначен.

в) Докажите, что если $P(x)$ — целозначный многочлен степени n, то многочлен $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

5. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что существуют различные целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которых $P(a_1) = a_2, P(a_2) = a_3, \ldots, P(a_n) = a_1$.

6. У приведенных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами есть общий нецелый корень α. Докажите, что у них есть еще общий нецелый корень $\beta \neq \alpha$ (возможно, комплексный).

7. Целые числа a, b, c таковы, что числа $a/b + b/c + c/a$ и $a/c + c/b + b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

8. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число k. Оказалось, что $P(Q(x)) - x \,\vdots\, k$ при всех целых x. Докажите, что и $Q(P(x)) - x \,\vdots\, k$ при всех целых x.

9. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами, k — натуральное число. Рассмотрим многочлен $Q_k(x) = P(\ldots P(P(x))\ldots)$ (многочлен P применен k раз). Докажите, что многочлен $Q_k(x) - x$ имеет не более n целых корней.

9 класс | Многочлены над $\mathbb{Z}$ | 5 марта 2020

1. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что $P(k)$ делится на $Q(k)$ для любого целого k. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

2. Уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами имеет n различных целых корней. Докажите, что если любые два его корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

3. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для любых действительных чисел a и b число $P(a+b)$ является целым в том и только том случае, когда число $P(a)+P(b)$ является целым.

4. Назовем многочлен *целозначным*, если он во всех целых точках принимает целые значения.

а) Обязательно ли все коэффициенты целозначного многочлена степени n являются целыми числами?

б) Докажите, что если многочлен степени k принимает целые значения в $k+1$ последовательной целой точке, то он целозначен.

в) Докажите, что если $P(x)$ — целозначный многочлен степени n, то многочлен $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

5. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что существуют различные целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которых $P(a_1) = a_2, P(a_2) = a_3, \ldots, P(a_n) = a_1$.

6. У приведенных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами есть общий нецелый корень α. Докажите, что у них есть еще общий нецелый корень $\beta \neq \alpha$ (возможно, комплексный).

7. Целые числа a, b, c таковы, что числа $a/b + b/c + c/a$ и $a/c + c/b + b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

8. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число k. Оказалось, что $P(Q(x)) - x \,\vdots\, k$ при всех целых x. Докажите, что и $Q(P(x)) - x \,\vdots\, k$ при всех целых x.

9. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами, k — натуральное число. Рассмотрим многочлен $Q_k(x) = P(\ldots P(P(x))\ldots)$ (многочлен P применен k раз). Докажите, что многочлен $Q_k(x) - x$ имеет не более n целых корней.