9 класс

Бесконечные множества

27 февраля 2020

Определение. Функция $f\colon X \to Y$ называется

инъекцией, если из того, что $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$;

сюръекцией, если для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

1. Пусть X и Y — конечные множества, $|X| = m$, $|Y| = n$. Найдите число
а) инъекций; **б)** сюръекций из X в Y.

Определение. Говорят, что множества X и Y *равномощны*, если существует *биекция* $f\colon X \to Y$, то есть функция, являющаяся одновременно инъекцией и сюръекцией. Множество X называют *счетным*, если оно равномощно $\mathbb{N}$, и *континуальным*, если оно равномощно интервалу $(0, 1)$.

2. Докажите, что $\mathbb{Q}$ счетно.

3. Установив биекцию, докажите, что множества $[0, 1)$, $[0, 1]$ и $\mathbb{R}$ континуальны.

4. Вещественное число называется *трансцендентным*, если оно не является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Существуют ли трансцендентные числа?

5. Докажите, что отрезок и квадрат равномощны.

6. Докажите, что не более чем счетно
а) множество непересекающихся интервалов на прямой;
б) множество непересекающихся контуров восьмерок на плоскости;
в) множество непересекающихся букв «Т» на плоскости.

7. Назовем бесконечную десятичную дробь *почти рациональной*, если каждую ее цифру можно заменить на не равную ей так, что получится рациональное число (при этом одинаковые цифры могут быть заменены на разные). Верно ли, что любая бесконечная десятичная дробь почти рациональна?

8. $\mathbb{N}$ разбито на две части: A и B, причём A не содержит трехчленной арифметической прогрессии. Обязательно ли в B есть бесконечная арифметическая прогрессия?

9. **Теорема Кантора**. Докажите, что непустое множество не может быть равномощно множеству всех своих подмножеств.

10. **Теорема Кантора–Бернштейна**. Известно, что каждое из множеств A и B равномощно некоторому подмножеству второго. Докажите, что A и B равномощны.

11. Найдите мощность **а)** всех биекций $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; **б)** всех счетных подмножеств $\mathbb{R}$.

12. Отрезок разбит на два множества. Докажите, что хотя бы одно из них равномощно отрезку.

13. Можно ли окрасить целочисленные точки плоскости в 2020 цветов так, чтобы все цвета присутствовали, на каждой прямой (содержащей не менее двух целых точек) раскраска была периодической, а раскраска плоскости не была периодической? (Раскраска плоскости называется *периодической*, если найдется ненулевой целочисленный вектор, при сдвиге на который раскраска переходит в себя.)

14. Пусть S — семейство подмножеств $\mathbb{N}$ такое, что для любых двух множеств, принадлежащих S, одно является подмножеством другого. Верно ли, что S не более чем счетно?

9 класс Бесконечные множества 27 февраля 2020

Определение. Функция $f\colon X \to Y$ называется

инъекцией, если из того, что $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$;

сюръекцией, если для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

1. Пусть X и Y — конечные множества, $|X| = m$, $|Y| = n$. Найдите число
а) инъекций; **б)** сюръекций из X в Y.

Определение. Говорят, что множества X и Y *равномощны*, если существует *биекция* $f\colon X \to Y$, то есть функция, являющаяся одновременно инъекцией и сюръекцией. Множество X называют *счетным*, если оно равномощно $\mathbb{N}$, и *континуальным*, если оно равномощно интервалу $(0, 1)$.

2. Докажите, что $\mathbb{Q}$ счетно.

3. Установив биекцию, докажите, что множества $[0, 1)$, $[0, 1]$ и $\mathbb{R}$ континуальны.

4. Вещественное число называется *трансцендентным*, если оно не является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Существуют ли трансцендентные числа?

5. Докажите, что отрезок и квадрат равномощны.

6. Докажите, что не более чем счетно
а) множество непересекающихся интервалов на прямой;
б) множество непересекающихся контуров восьмерок на плоскости;
в) множество непересекающихся букв «Т» на плоскости.

7. Назовем бесконечную десятичную дробь *почти рациональной*, если каждую ее цифру можно заменить на не равную ей так, что получится рациональное число (при этом одинаковые цифры могут быть заменены на разные). Верно ли, что любая бесконечная десятичная дробь почти рациональна?

8. $\mathbb{N}$ разбито на две части: A и B, причём A не содержит трехчленной арифметической прогрессии. Обязательно ли в B есть бесконечная арифметическая прогрессия?

9. **Теорема Кантора**. Докажите, что непустое множество не может быть равномощно множеству всех своих подмножеств.

10. **Теорема Кантора–Бернштейна**. Известно, что каждое из множеств A и B равномощно некоторому подмножеству второго. Докажите, что A и B равномощны.

11. Найдите мощность **а)** всех биекций $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; **б)** всех счетных подмножеств $\mathbb{R}$.

12. Отрезок разбит на два множества. Докажите, что хотя бы одно из них равномощно отрезку.

13. Можно ли окрасить целочисленные точки плоскости в 2020 цветов так, чтобы все цвета присутствовали, на каждой прямой (содержащей не менее двух целых точек) раскраска была периодической, а раскраска плоскости не была периодической? (Раскраска плоскости называется *периодической*, если найдется ненулевой целочисленный вектор, при сдвиге на который раскраска переходит в себя.)

14. Пусть S — семейство подмножеств $\mathbb{N}$ такое, что для любых двух множеств, принадлежащих S, одно является подмножеством другого. Верно ли, что S не более чем счетно?