9 класс — Неравенство Мюрхеда — 13 февраля 2020

Определение. Пусть $A=(a_1,\ldots,a_n)$ и $B=(b_1,\ldots,b_n)$ — невозрастающие наборы целых неотрицательных чисел (т. е. $a_1\geqslant\ldots\geqslant a_n$ и $b_1\geqslant\ldots\geqslant b_n$). Набор A *мажорирует* набор B (обозначение $A\succ B$), если выполняются следующие условия: $a_1\geqslant b_1$, $a_1+a_2\geqslant b_1+b_2$, …, $a_1+\ldots+a_{n-1}\geqslant b_1+\ldots+b_{n-1}$, $\quad a_1+\ldots+a_n=b_1+\ldots+b_n$.

1. Неравенство Мюрхеда. Даны положительные числа $x_1,\ldots,x_n$, а также два невозрастающих набора целых неотрицательных чисел $(a_1,\ldots,a_n)\succ(b_1,\ldots,b_n)$. Докажите, что

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)} x_{i_1}^{a_1}\ldots x_{i_n}^{a_n}\geqslant\sum_{(i_1,\ldots,i_n)} x_{i_1}^{b_1}\ldots x_{i_n}^{b_n},$$

где суммирование ведётся по всем перестановкам чисел $1,\ldots,n$.

Определение. Выражение $\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_n)} x_{i_1}^{a_1}\ldots x_{i_n}^{a_n}$ называется *орбитой* одночлена $x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}$, и кратко обозначается $T(a_1,\ldots,a_n)$.

2. Для положительных чисел a,b,c,d докажите, что

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geqslant\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

3. Докажите все неравенства о средних с помощью Мюрхеда.

4. Положительные числа a,b,c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что $a+b+c\geqslant ab+bc+ac$.

5. Пусть $x,y,z>0$. Докажите, что

$$8(x^3+y^3+z^3)^2\geqslant 9(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy).$$

6. Положительные числа a,b,c таковы, что $a+b+c=ab+bc+ac$. Докажите, что $a+b+c+1\geqslant 4abc$.

7. Неравенство Шура. Для любых положительных x,y,z и $p\geqslant 1$ докажите неравенство

$$x^p(x-y)(x-z)+y^p(y-x)(y-z)+z^p(z-x)(z-y)\geqslant 0.$$

9 класс — Неравенство Мюрхеда — 13 февраля 2020

Определение. Пусть $A=(a_1,\ldots,a_n)$ и $B=(b_1,\ldots,b_n)$ — невозрастающие наборы целых неотрицательных чисел (т. е. $a_1\geqslant\ldots\geqslant a_n$ и $b_1\geqslant\ldots\geqslant b_n$). Набор A *мажорирует* набор B (обозначение $A\succ B$), если выполняются следующие условия: $a_1\geqslant b_1$, $a_1+a_2\geqslant b_1+b_2$, …, $a_1+\ldots+a_{n-1}\geqslant b_1+\ldots+b_{n-1}$, $\quad a_1+\ldots+a_n=b_1+\ldots+b_n$.

1. Неравенство Мюрхеда. Даны положительные числа $x_1,\ldots,x_n$, а также два невозрастающих набора целых неотрицательных чисел $(a_1,\ldots,a_n)\succ(b_1,\ldots,b_n)$. Докажите, что

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)} x_{i_1}^{a_1}\ldots x_{i_n}^{a_n}\geqslant\sum_{(i_1,\ldots,i_n)} x_{i_1}^{b_1}\ldots x_{i_n}^{b_n},$$

где суммирование ведётся по всем перестановкам чисел $1,\ldots,n$.

Определение. Выражение $\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_n)} x_{i_1}^{a_1}\ldots x_{i_n}^{a_n}$ называется *орбитой* одночлена $x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}$, и кратко обозначается $T(a_1,\ldots,a_n)$.

2. Для положительных чисел a,b,c,d докажите, что

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geqslant\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

3. Докажите все неравенства о средних с помощью Мюрхеда.

4. Положительные числа a,b,c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что $a+b+c\geqslant ab+bc+ac$.

5. Пусть $x,y,z>0$. Докажите, что

$$8(x^3+y^3+z^3)^2\geqslant 9(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy).$$

6. Положительные числа a,b,c таковы, что $a+b+c=ab+bc+ac$. Докажите, что $a+b+c+1\geqslant 4abc$.

7. Неравенство Шура. Для любых положительных x,y,z и $p\geqslant 1$ докажите неравенство

$$x^p(x-y)(x-z)+y^p(y-x)(y-z)+z^p(z-x)(z-y)\geqslant 0.$$