9 класс	Инверсия	10 февраля 2020

Определение. *Инверсией* относительно окружности ω с центром O радиуса R называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку $A \neq O$ в точку A' на луче OA такую, что выполняется соотношение $OA \cdot OA' = R^2$. При этом O и R называются *центром* и *радиусом инверсии*, а ω называется *окружностью инверсии.*

Упражнение 1. Найдите все неподвижные точки инверсии. Докажите, что если при инверсии точка A переходит в точку A', то точка A' переходит в точку A (точки A и A' называются *инверсными*).

Упражнение 2. Пусть AM и AN — касательные к окружности S, проведённые из точки A, A' — середина MN. Докажите, что точки A и A' инверсны относительно S.

Упражнение 3. Пусть A и A', B и B' — пары инверсных точек. Докажите, что они лежат на одной окружности.

1. Докажите, что при инверсии

а) прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя;

б) окружность с центром C, проходящая через O, переходит в прямую, перпендикулярную OC; а также прямая, не проходящая через O, переходит в окружность с центром C такую, что OC перпендикулярно прямой;

в) окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр.

2. Докажите, что инверсия с центром в вершине A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) и радиуса AB переводит основание BC и дугу BC описанной окружности друг в друга.

3. а) Пусть A и A', B и B' — пары инверсных точек относительно окружности с центром O радиуса R. Докажите, что расстояние между точками меняется как $A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$.

б) Неравенство Птолемея. Докажите, что в любом выпуклом четырёхугольнике сумма произведений противоположных сторон больше либо равна произведения его диагоналей, причём равенство достигается только когда четырёхугольник — вписанный.

(*Указание: рассмотрите инверсию с центром в одной из вершин.*)

4. а) Инверсия с центром O переводит окружность ω в окружность ω'. Докажите, что ω и ω' гомотетичны с центром O.

б) Даны две окружности. Когда существует инверсия, переводящая их в концентрические?

5. Окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 таковы, что ω_1 и ω_3 касаются каждой из окружностей ω_2 и ω_4. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности или прямой.

6. Окружность ω касается неравных окружностей ω_1 и ω_2 внешним образом в точках A и B. Докажите, что прямая AB проходит через центр гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2.

7. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку их касания проводится общая касательная. Докажите, что все получившиеся прямые проходят через фиксированную точку. Что это за точка?

8. В треугольнике ABC точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC соответственно. Описанные окружности треугольников CBB_1 и CAA_1 вторично пересекаются в точке P . Прямая CP вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q. Найдите отношение $CP : CQ$.

9. Окружность γ_1 касается окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 внутренним образом, а окружность γ_2 — внешним. Для каждой окружности ω_i проводится прямая, соединяющая ее точки касания с окружностями γ_i. Докажите, что три такие прямые пересекаются в одной точке.

10. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, CAP и точка P лежат на одной окружности.