9 класс Лемма об уточнении показателя 27 января 2020

Определение. *Порядком вхождения* $ord_p(n)$ будем обозначать степень, в которой простое число p входит в разложение n на простые множители.

Лемма об уточнении показателя. Даны простое число p, натуральное k и целые различные a и b, причём $a - b \vdots p$, a и b не делятся на p. Тогда, если $p > 2$ или $ord_p(a-b) > 1$, то

$$ord_p(a^k - b^k) = ord_p(a-b) + ord_p(k).$$

Замечание. Иногда эту лемму называют леммой Гензеля, но это не совсем правильно. Иногда её называют LTE-леммой (lifting the exponent), и это уже нормально.

1. Даны простое число p, натуральные k и s, различные целые a и b, такие, что $a - b$ делится на p, причём a и b не делятся на p.

а) Докажите, что $ord_p(a^p - b^p) > ord_p(a-b)$.
б) Докажите, что $ord_p(a^s - b^s) = ord_p(a-b)$, если s не кратно p.
в) Докажите, что $ord_p(a^k - b^k) \geqslant ord_p(a-b) + ord_p(k)$.
г) Докажите, что если $p > 2$, то $ord_p(a^p - b^p) = ord_p(a-b) + 1$.
д) Докажите лемму об уточнении показателя.

2. На какую максимальную степень 5 делится число $3^{10000} - 2^{10000}$?

3. Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

4. При каких натуральных n число $2020^n - 1$ делится на $1000^n - 1$?

5. Натуральные числа a, b, p, n и k таковы, что $a^n + b^n = p^k$. Докажите, что если число n $(n > 1)$ — нечётное, а число p — нечётное простое, то n является степенью числа p.

6. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

7. Докажите, что 2 является первообразным корнем по модулю 3^{2020}.

8. Решите в натуральных числах уравнение $(a+1)^b - a^c = 1$.

9. Докажите, что для любого натурального числа $a > 57$ существует бесконечно много натуральных n таких, что $a^n - 1$ делится на n^2.

10. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что лишь для конечного числа натуральных n сумма $\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$ является целой.

9 класс Лемма об уточнении показателя 27 января 2020

Определение. *Порядком вхождения* $ord_p(n)$ будем обозначать степень, в которой простое число p входит в разложение n на простые множители.

Лемма об уточнении показателя. Даны простое число p, натуральное k и целые различные a и b, причём $a - b \vdots p$, a и b не делятся на p. Тогда, если $p > 2$ или $ord_p(a-b) > 1$, то

$$ord_p(a^k - b^k) = ord_p(a-b) + ord_p(k).$$

Замечание. Иногда эту лемму называют леммой Гензеля, но это не совсем правильно. Иногда её называют LTE-леммой (lifting the exponent), и это уже нормально.

1. Даны простое число p, натуральные k и s, различные целые a и b, такие, что $a - b$ делится на p, причём a и b не делятся на p.

а) Докажите, что $ord_p(a^p - b^p) > ord_p(a-b)$.
б) Докажите, что $ord_p(a^s - b^s) = ord_p(a-b)$, если s не кратно p.
в) Докажите, что $ord_p(a^k - b^k) \geqslant ord_p(a-b) + ord_p(k)$.
г) Докажите, что если $p > 2$, то $ord_p(a^p - b^p) = ord_p(a-b) + 1$.
д) Докажите лемму об уточнении показателя.

2. На какую максимальную степень 5 делится число $3^{10000} - 2^{10000}$?

3. Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

4. При каких натуральных n число $2020^n - 1$ делится на $1000^n - 1$?

5. Натуральные числа a, b, p, n и k таковы, что $a^n + b^n = p^k$. Докажите, что если число n $(n > 1)$ — нечётное, а число p — нечётное простое, то n является степенью числа p.

6. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

7. Докажите, что 2 является первообразным корнем по модулю 3^{2020}.

8. Решите в натуральных числах уравнение $(a+1)^b - a^c = 1$.

9. Докажите, что для любого натурального числа $a > 57$ существует бесконечно много натуральных n таких, что $a^n - 1$ делится на n^2.

10. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что лишь для конечного числа натуральных n сумма $\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$ является целой.