9 класс **Готовимся к регионалке — 2** 23 января 2020

1. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причём все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у $\frac{1}{12}$ из них в номере билета есть цифра 7?

2. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $a^2(b+c-a) = b^2(c+a-b) = c^2(a+b-c)$. Докажите, что $a = b = c$.

3. Лестница насчитывает 2008 ступенек, на каждой из них написано одно из чисел $-2, -1, 1, 2$. Число на ступеньке указывает, на сколько ступенек надо с неё шагнуть (вверх, если число положительное, или вниз, если число отрицательное). Известно, что с какой бы ступеньки ни начинался путь, он не выйдет за пределы лестницы и обязательно пройдёт через верхнюю ступеньку. Может ли сумма всех чисел на ступеньках быть отрицательной?

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD описана около окружности. Известно, что $\angle BCD = 2\angle BAD$. Найдите $\frac{AB}{BC}$.

5. На сторонах треугольника ABC отмечены 6 точек: C_1 и C_2 на AB, B_1 и B_2 на AC, A_1 и A_2 на BC. Известно, что $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$, $C_1A_2 \parallel AC$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равновелики.

6. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматной доске так, чтобы каждая не занятая ладьёй клетка билась хотя бы тремя из них? (Ладья бьёт клетку, если между ними нет других ладей.)

7. Пусть P — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно так, что $AM = AP$ и $CN = CP$. Перпендикуляры, проведённые в точках M и N к сторонам AB и BC соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что $\angle QIB = 90^\circ$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

8. Каждое натуральное число от 1 до n домножили на некоторую степень двойки с неотрицательным целым показателем, после чего все числа сложили. Полученная сумма также оказалась степенью двойки. При каких n такое возможно?

9. Шахматную доску разбили на доминошки произвольным образом. Каждую из них требуется закрасить каким-нибудь цветом так, чтобы любые две клетки доски, отстоящие на ход коня, были разноцветными. Какого наименьшего количества цветов гарантированно хватит для этого?

10. У трёхчлена $x^2 - ax + b$ коэффициенты a и b — натуральные числа, а десятичная запись одного из корней начинается с 2,008... Найдите наименьшее возможное значение a.

9 класс **Готовимся к регионалке — 2** 23 января 2020

1. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причём все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у $\frac{1}{12}$ из них в номере билета есть цифра 7?

2. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $a^2(b+c-a) = b^2(c+a-b) = c^2(a+b-c)$. Докажите, что $a = b = c$.

3. Лестница насчитывает 2008 ступенек, на каждой из них написано одно из чисел $-2, -1, 1, 2$. Число на ступеньке указывает, на сколько ступенек надо с неё шагнуть (вверх, если число положительное, или вниз, если число отрицательное). Известно, что с какой бы ступеньки ни начинался путь, он не выйдет за пределы лестницы и обязательно пройдёт через верхнюю ступеньку. Может ли сумма всех чисел на ступеньках быть отрицательной?

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD описана около окружности. Известно, что $\angle BCD = 2\angle BAD$. Найдите $\frac{AB}{BC}$.

5. На сторонах треугольника ABC отмечены 6 точек: C_1 и C_2 на AB, B_1 и B_2 на AC, A_1 и A_2 на BC. Известно, что $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$, $C_1A_2 \parallel AC$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равновелики.

6. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматной доске так, чтобы каждая не занятая ладьёй клетка билась хотя бы тремя из них? (Ладья бьёт клетку, если между ними нет других ладей.)

7. Пусть P — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно так, что $AM = AP$ и $CN = CP$. Перпендикуляры, проведённые в точках M и N к сторонам AB и BC соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что $\angle QIB = 90^\circ$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

8. Каждое натуральное число от 1 до n домножили на некоторую степень двойки с неотрицательным целым показателем, после чего все числа сложили. Полученная сумма также оказалась степенью двойки. При каких n такое возможно?

9. Шахматную доску разбили на доминошки произвольным образом. Каждую из них требуется закрасить каким-нибудь цветом так, чтобы любые две клетки доски, отстоящие на ход коня, были разноцветными. Какого наименьшего количества цветов гарантированно хватит для этого?

10. У трёхчлена $x^2 - ax + b$ коэффициенты a и b — натуральные числа, а десятичная запись одного из корней начинается с 2,008... Найдите наименьшее возможное значение a.