9 класс **Готовимся к регионалке** 16 января 2020

1. Гриб называется *плохим*, если в нём не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

2. На 11 листках бумаги записаны 11 фраз.
1) Левее этого листка нет листков с ложными утверждениями.
2) Ровно один листок левее этого содержит ложное утверждение.
3) Ровно 2 листка левее этого содержат ложные утверждения.
...
11) Ровно 10 листков левее этого содержат ложные утверждения.
Листки в некотором порядке выложили в ряд, идущий слева направо. После этого некоторые из написанных утверждений стали верными, а некоторые — неверными. Каково наибольшее возможное число верных утверждений?

3. Рациональные a и b таковы, что $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$. Докажите, что $1 - ab$ является квадратом рационального числа.

4. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 8^m равна 8. Может ли при этом 8^m оканчиваться на 6?

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная AC и проходящая через точку A_1, пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что $\angle ADC = 90^\circ$.

6. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, при этом в сумме дают хотя бы 100. Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма всех этих чисел?

7. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC — тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω.

8. *Неполным квадратом разности* чисел a и b называется число $a^2 - ab + b^2$.
По кругу выписаны 2019 положительных чисел. Оказалось, что все неполные квадраты разности соседних чисел равны. Докажите, что и все сами числа равны.

9. Правильный треугольник со стороной 5 разбит на 25 правильных треугольничков со стороной 1. Их пронумеровали натуральными числами от 1 до 25 по порядку, слева направо, сверху вниз (так, к одной из сторон примыкают 5 треугольников с числами 1,4,9,16,25). Можно ли эти числа расставить в клетках квадрата 5×5 так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольничках, были записаны и в соседних клетках квадрата?

10. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов, причем каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Известно, что любые два шахматиста, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом турнире. (За выигрыш партии шахматисту начисляется 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0.)

9 класс **Готовимся к регионалке** 16 января 2020

1. Гриб называется *плохим*, если в нём не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

2. На 11 листках бумаги записаны 11 фраз.
1) Левее этого листка нет листков с ложными утверждениями.
2) Ровно один листок левее этого содержит ложное утверждение.
3) Ровно 2 листка левее этого содержат ложные утверждения.
...
11) Ровно 10 листков левее этого содержат ложные утверждения.
Листки в некотором порядке выложили в ряд, идущий слева направо. После этого некоторые из написанных утверждений стали верными, а некоторые — неверными. Каково наибольшее возможное число верных утверждений?

3. Рациональные a и b таковы, что $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$. Докажите, что $1 - ab$ является квадратом рационального числа.

4. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 8^m равна 8. Может ли при этом 8^m оканчиваться на 6?

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная AC и проходящая через точку A_1, пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что $\angle ADC = 90^\circ$.

6. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, при этом в сумме дают хотя бы 100. Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма всех этих чисел?

7. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC — тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω.

8. *Неполным квадратом разности* чисел a и b называется число $a^2 - ab + b^2$.
По кругу выписаны 2019 положительных чисел. Оказалось, что все неполные квадраты разности соседних чисел равны. Докажите, что и все сами числа равны.

9. Правильный треугольник со стороной 5 разбит на 25 правильных треугольничков со стороной 1. Их пронумеровали натуральными числами от 1 до 25 по порядку, слева направо, сверху вниз (так, к одной из сторон примыкают 5 треугольников с числами 1,4,9,16,25). Можно ли эти числа расставить в клетках квадрата 5×5 так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольничках, были записаны и в соседних клетках квадрата?

10. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов, причем каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Известно, что любые два шахматиста, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом турнире. (За выигрыш партии шахматисту начисляется 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0.)