9 класс **Решения** 13 января 2020

1. На доске написано число 2000. Разрешается переставить в нём произвольным образом первые три цифры (ставить цифру 0 на первое место нельзя) или прибавить 361. Через 100 таких операций вновь получили 2000. Сколько раз прибавляли 361, если известно, что это сделали хотя бы один раз?

Ответ. 90.

Решение. Ясно, что число всегда должно было оставаться четырёхзначным. Заметим, что операция перестановки первых трёх цифр не меняет остаток числа ни при делении на 9 (т.к. число при делении на 9 даёт такой же остаток, как и его сумма цифр), ни при делении на 10 (т.к. последняя цифра сохраняется). А операция прибавления 361 увеличивает на 1 и остаток при делении на 9, и при делении на 10. Поэтому количество таких операций кратно и 9, и 10. Поскольку оно не меньше 1 и не больше 100, то оно равно 90.

2. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

Ответ. Да, существует.

Решение. Подойдёт, например, многочлен $\sqrt{2}(x-1)(x-2)+x$. Легко проверить, что он удовлетворяет всем условиям.

3. Фигура *кенгуру* бьёт клетки, расположенные от неё на 2 или 3 клетки левее, правее, выше или ниже (суммарно не более 8 клеток; соседние клетки кенгуру не бьёт). Какое наибольшее число попарно не бьющих друг друга кенгуру можно расставить на доске $8\times\ 8$?

Ответ. 27.

Решение. 27 кенгуру можно расставить так: последовательно пронумеруем диагонали, параллельные диагонали идущей вправо-вверх, числами от 1 до 15, и диагонали с номерами 2,3,7,8,12,13 полностью заполняем кенгуру. Докажем теперь, что кенгуру всегда не более 27.

Разобьём всю доску на квадрат 3×3 и 11 прямоугольников 1×5. Заметим, что в квадрате 3×3 может стоять не более 5 кенгуру (если пронумеровать слева направо клетки первой строки 1,2,3, второй — 4,5,6, третьей — 7,8,9, то в каждой из четырёх пар 1-3, 4-6, 7-9, 2-8 должна быть хотя бы одна свободная от кенгуру клетка).

Оценим теперь количество кенгуру в прямоугольнике 1×5. Назовём его клетки последовательно A, B, C, D, E. Если в клетках A и E

нет кенгуру, то в клетках B и D суммарно не более 1 кенгуру, а также в клетке C не более 1 кенгуру. Если же в какой-то угловой клетке есть кенгуру (например, в A), то в клетках C и D кенгуру стоять не может, а также в клетках B и E суммарно не более 1 кенгуру. Итак, в каждом прямоугольнике 1×5 может стоять не более 2 кенгуру.

Значит, всего кенгуру не более $5 + 11 \cdot 2 = 27$.

4. В треугольнике ABC угол A равен $20°$, а угол C равен $40°$. Проведены биссектриса AL и внешняя биссектриса CN (L лежит на стороне BC, а N — на продолжении стороны AB). Найдите $\angle CLN$. Ответ выразите целым числом градусов.

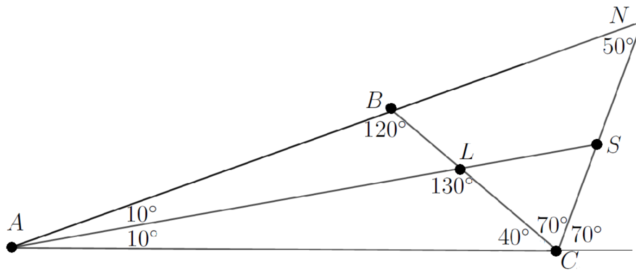
Ответ. $80°$.

Решение 1. По условию $\angle ABC = 120°, \angle BAL = \angle CAL = 10°$, $\angle BCN = 70°$. Тогда легко находим углы $\angle ALC = 130°$ и $\angle ANC = 50°$.

Пусть прямые AL и CN пересекаются в точке S. Заметим, что для треугольника ABC точка S является пересечением биссектрисы внутреннего угла A и внешнего угла C, поэтому она является центром вневписанной окружности и лежит на биссектрисе угла $CBN = 60°$.

Заметим, что четырёхугольник $BLSN$ — вписанный, поскольку $\angle BLS + \angle BNS = 180°$. Отсюда следует, что $\angle SLN = \angle CBN = 30°$.

Искомый угол $\angle CLN = \angle CLS + \angle SLN = 50° + 30° = 80°$.

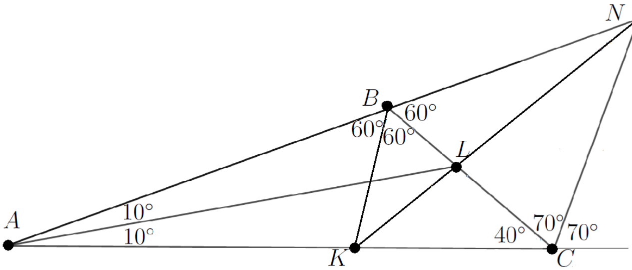


Решение 2. Проведём биссектрису BK угла B. Тогда точки K, L, N лежат на одной прямой по теореме Менелая для треугольника ABC:

$$\frac{AK}{KC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BN}{NA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1.$$

Заметим, что для треугольника ABK точка L лежит является пересечением биссектрисы внутреннего угла A и внешнего угла B, поэтому она является центром вневписанной окружности и лежит на биссектрисе угла BKC, равного $80°$. Следовательно, $\angle CKL = 40°$.

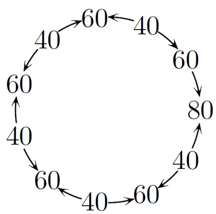
Искомый угол $\angle CLN = \angle LKC + \angle LCK = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$.



5. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, при этом в сумме дают хотя бы 100. Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма всех этих чисел?

Ответ. 580.

Решение 1. Соединим каждые два соседних числа стрелкой от меньшего к большему. Т.к. общее количество стрелок нечётно, найдутся две подряд идущих стрелки, направленные в одну сторону: $a \to b \to c$. Значит, $b \leqslant c - 20$, $a \leqslant b - 20 \leqslant c - 40$, поэтому $100 \leqslant a + b \leqslant 2c - 60$, откуда $c \geqslant 80$. Все числа, кроме c, можно разбить на 5 пар соседних чисел; значит, сумма всех чисел не меньше $80 + 5 \cdot 100 = 580$. Пример на сумму 580 приведён ниже.



Решение 2. Назовём число *большим*, если оно не меньше 60. Заметим, что в любой паре соседних чисел есть большое число (если большее из них меньше 60, то второе меньше 40, а их сумма меньше 100). Рассмотрим максимальное число c (очевидно, оно большое). Разобьём остальные числа на пары соседних (сумма в каждой паре не меньше 100, поэтому сумма всех этих 10 чисел не меньше 500), в каждой из них есть большое число. Следовательно, среди 11 чисел есть хотя бы 6 больших, поэтому какие-то два из них — соседние. Тогда большее из них не меньше $60 + 20 = 80$, поэтому и $c \geqslant 80$. Значит, общая сумма не меньше $80 + 500 = 580$.