9 класс	Разнобой	9 декабря 2019

1. Найдите все многочлены $P \in \mathbb{Z}[x]$ такие, что число $P(P(n)+n)$ является простым для бесконечно многих целых n.

2. На доске 8×8 отмечены центры всех клеток. Можно ли провести 13 прямых так, чтобы любые две отмеченные точки разделялись прямой?

3. Какое наибольшее количество клеток доски $m \times n$ можно закрасить так, чтобы никакие три центра закрашенных клеток не образовывали прямоугольный треугольник?

4. Диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Точка M — середина боковой стороны AB, точка N симметрична центру описанной окружности треугольника ABD относительно прямой AD. Докажите, что $\angle CMN = 90°$.

5. Дана клетчатая решётка $(4n+2) \times (4n+2)$, где n — натуральное число. Черепашка за один ход может перейти в соседнюю по стороне клетку. Черепашка обошла всю доску, побывав в каждой клетке ровно 1 раз, закончив в клетке, в которой начинала. Найдите наибольшее k такое, что черепашка пересекла хотя бы k раз какую-то линию решётки (отрезок длины $4n+2$).

6. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки D, E, F — основания высот из вершин A, B, C соответственно, точка M — середина BC. Прямые AD и EF пересекаются в точке X, прямые AO и BC — в точке Y. Докажите, что середина XY лежит на прямой AM.

7. Пусть S — непустое подмножество натуральных чисел такое, что если $a, b \in S$, то $ab+1 \in S$. Докажите, что множество простых чисел, взаимно простых со всеми элементами S, конечно.

8. В произвольном графе все вершины покрашены в чёрный цвет. Разрешается взять произвольную вершину и перекрасить в противоположный цвет (чёрный — в белый, а белый — в чёрный) её и всех её соседей. Можно ли такими операциями перекрасить все вершины графа в белый цвет?

9 класс	Разнобой	9 декабря 2019

1. Найдите все многочлены $P \in \mathbb{Z}[x]$ такие, что число $P(P(n)+n)$ является простым для бесконечно многих целых n.

2. На доске 8×8 отмечены центры всех клеток. Можно ли провести 13 прямых так, чтобы любые две отмеченные точки разделялись прямой?

3. Какое наибольшее количество клеток доски $m \times n$ можно закрасить так, чтобы никакие три центра закрашенных клеток не образовывали прямоугольный треугольник?

4. Диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Точка M — середина боковой стороны AB, точка N симметрична центру описанной окружности треугольника ABD относительно прямой AD. Докажите, что $\angle CMN = 90°$.

5. Дана клетчатая решётка $(4n+2) \times (4n+2)$, где n — натуральное число. Черепашка за один ход может перейти в соседнюю по стороне клетку. Черепашка обошла всю доску, побывав в каждой клетке ровно 1 раз, закончив в клетке, в которой начинала. Найдите наибольшее k такое, что черепашка пересекла хотя бы k раз какую-то линию решётки (отрезок длины $4n+2$).

6. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки D, E, F — основания высот из вершин A, B, C соответственно, точка M — середина BC. Прямые AD и EF пересекаются в точке X, прямые AO и BC — в точке Y. Докажите, что середина XY лежит на прямой AM.

7. Пусть S — непустое подмножество натуральных чисел такое, что если $a, b \in S$, то $ab+1 \in S$. Докажите, что множество простых чисел, взаимно простых со всеми элементами S, конечно.

8. В произвольном графе все вершины покрашены в чёрный цвет. Разрешается взять произвольную вершину и перекрасить в противоположный цвет (чёрный — в белый, а белый — в чёрный) её и всех её соседей. Можно ли такими операциями перекрасить все вершины графа в белый цвет?