

1. Найдите сумму

$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{100}{98! + 99! + 100!}.$$

2. Укажите какое-нибудь $x > 1$, для которого является целым число

$$(x - \sqrt[3]{2} + 1)(x + \sqrt[3]{2} + 1)(x - 1).$$

3. Докажите, что уравнения $2^x + \frac{1}{2^x} = 2^{2x}$ и $2^x + \frac{1}{2^x} = 2^{3x} - 1$ имеют одни и те же действительные корни.

4. Найдите все пары действительных чисел a и b такие, что для любых положительных чисел x и y , меньших 1, верно

$$[ax + by] + [bx + ay] = (a + b)[x + y].$$

5. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Докажите, что

$$x + y + z \geq \sqrt{\frac{xy + 1}{2}} + \sqrt{\frac{yz + 1}{2}} + \sqrt{\frac{zx + 1}{2}}.$$

6. Дана перестановка a_1, a_2, \dots, a_n чисел $1, 2, \dots, n$. Оказалось, что для всех $1 \leq k \leq n - 1$ верно $\frac{1 + a_k}{a_{k+1}} < 1 + \frac{2}{k}$. Докажите, что это тождественная перестановка.

7. Докажите, что при всех натуральных $n \geq 2$ верно

$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \leq n.$$

8. Положительные a, b, c, d таковы, что $abcd = 4$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$. Найдите наибольшее возможное значение $ab + bc + cd + da$.

9. Многочлен $P(x)$ степени 100 с действительными коэффициентами таков, что $P(x) - 1$ имеет ровно 65 корней, а $P(x) + 1$ имеет ровно 75 корней. Какое наименьшее количество корней может иметь $P(x)$?

1. Найдите сумму

$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{100}{98! + 99! + 100!}.$$

2. Укажите какое-нибудь $x > 1$, для которого является целым число

$$(x - \sqrt[3]{2} + 1)(x + \sqrt[3]{2} + 1)(x - 1).$$

3. Докажите, что уравнения $2^x + \frac{1}{2^x} = 2^{2x}$ и $2^x + \frac{1}{2^x} = 2^{3x} - 1$ имеют одни и те же действительные корни.

4. Найдите все пары действительных чисел a и b такие, что для любых положительных чисел x и y , меньших 1, верно

$$[ax + by] + [bx + ay] = (a + b)[x + y].$$

5. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Докажите, что

$$x + y + z \geq \sqrt{\frac{xy + 1}{2}} + \sqrt{\frac{yz + 1}{2}} + \sqrt{\frac{zx + 1}{2}}.$$

6. Дана перестановка a_1, a_2, \dots, a_n чисел $1, 2, \dots, n$. Оказалось, что для всех $1 \leq k \leq n - 1$ верно $\frac{1 + a_k}{a_{k+1}} < 1 + \frac{2}{k}$. Докажите, что это тождественная перестановка.

7. Докажите, что при всех натуральных $n \geq 2$ верно

$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \leq n.$$

8. Положительные a, b, c, d таковы, что $abcd = 4$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$. Найдите наибольшее возможное значение $ab + bc + cd + da$.

9. Многочлен $P(x)$ степени 100 с действительными коэффициентами таков, что $P(x) - 1$ имеет ровно 65 корней, а $P(x) + 1$ имеет ровно 75 корней. Какое наименьшее количество корней может иметь $P(x)$?