9 класс **Геометрия масс** 28 ноября 2019

Определение. Пусть на плоскости задана система точек с приписанными им массами, т. е. имеется набор пар (X_i, m_i), где X_i — точка плоскости, а m_i — действительное число. *Центром масс* системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$ называется точка O, для которой выполнено $m_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{0}$.

0. Докажите теорему Чевы с помощью группировки масс.

1. В середины сторон треугольника ABC помещены массы, равные длинам соответствующих сторон исходного треугольника. Докажите, что центр масс этой системы расположен в центре вписанной окружности треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

2. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M и N соответственно так, что $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.

3. Система из n точек на плоскости такова, что для любых двух точек данной системы можно указать движение плоскости, при котором первая точка перейдёт во вторую, а система перейдёт сама в себя. Доказать, что все точки такой системы лежат на одной окружности.

4. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остаётся на месте. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника, если известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника.

5. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые CC_1, AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке O. Докажите, что

а) $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{CA_1}{A_1B} + \dfrac{CB_1}{B_1A}$; **б)** $\dfrac{AO}{OA_1} \cdot \dfrac{BO}{OB_1} \cdot \dfrac{CO}{OC_1} = 2 + \dfrac{AO}{OA_1} + \dfrac{BO}{OB_1} + \dfrac{CO}{OC_1} \geqslant 8$.

6. На окружности даны n точек. Через центр масс $n-2$ точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две оставшиеся точки. Докажите, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

7. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, причём отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Пусть l_a, l_b, l_c — прямые, соединяющие середины отрезков BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1. Докажите, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке, причём эта точка лежит на отрезке PM, где M — центр масс треугольника ABC.

8. На плоскости даны отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ такие, что каждый из них начинается на одной из двух данных прямых в точке A_i, оканчивается на другой прямой в точке B_i, и проходит через точку G (не лежащую на данных прямых) — центр тяжести единичных масс, помещенных в $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (не лежащих на одной и той же прямой). Докажите, что

$$\frac{A_1G}{GB_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + \ldots + \frac{A_nG}{GB_n} = n.$$

9 класс **Геометрия масс** 28 ноября 2019

Определение. Пусть на плоскости задана система точек с приписанными им массами, т. е. имеется набор пар (X_i, m_i), где X_i — точка плоскости, а m_i — действительное число. *Центром масс* системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$ называется точка O, для которой выполнено $m_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{0}$.

0. Докажите теорему Чевы с помощью группировки масс.

1. В середины сторон треугольника ABC помещены массы, равные длинам соответствующих сторон исходного треугольника. Докажите, что центр масс этой системы расположен в центре вписанной окружности треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

2. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M и N соответственно так, что $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.

3. Система из n точек на плоскости такова, что для любых двух точек данной системы можно указать движение плоскости, при котором первая точка перейдёт во вторую, а система перейдёт сама в себя. Доказать, что все точки такой системы лежат на одной окружности.

4. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остаётся на месте. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника, если известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника.

5. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые CC_1, AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке O. Докажите, что

а) $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{CA_1}{A_1B} + \dfrac{CB_1}{B_1A}$; **б)** $\dfrac{AO}{OA_1} \cdot \dfrac{BO}{OB_1} \cdot \dfrac{CO}{OC_1} = 2 + \dfrac{AO}{OA_1} + \dfrac{BO}{OB_1} + \dfrac{CO}{OC_1} \geqslant 8$.

6. На окружности даны n точек. Через центр масс $n-2$ точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две оставшиеся точки. Докажите, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

7. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, причём отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Пусть l_a, l_b, l_c — прямые, соединяющие середины отрезков BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1. Докажите, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке, причём эта точка лежит на отрезке PM, где M — центр масс треугольника ABC.

8. На плоскости даны отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ такие, что каждый из них начинается на одной из двух данных прямых в точке A_i, оканчивается на другой прямой в точке B_i, и проходит через точку G (не лежащую на данных прямых) — центр тяжести единичных масс, помещенных в $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (не лежащих на одной и той же прямой). Докажите, что

$$\frac{A_1G}{GB_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + \ldots + \frac{A_nG}{GB_n} = n.$$