9 класс Комплексные координаты. Памятка 25 ноября 2019

• Выработайте план решения. Разберитесь, что и в каком порядке Вы будете делать. И, прежде чем приступать к реализации плана, потратьте не менее 5-10 минут на его оптимизацию: попробуйте переопределить точки поудобнее или заменить условия на равносильные, но алгебраически более простые.

• Вводите симметричные и однородные обозначения. В финале решения получатся симметричные однородные многочлены, и их легко будет разложить.

• Считайте **аккуратно**. Не делайте два алгебраических преобразования одновременно. К примеру, если надо раскрыть скобки и привести подобные, то сначала раскройте скобки, и только потом приведите подобные. Не экономьте бумагу; не пишите на клочках, полях и в случайных местах страницы.

• В финальном тождестве **никогда** не раскрывайте скобки; наоборот, раскладывайте многочлены на множители.

• Часто какая-то точка или какое-то условие симметрично зависит от двух стартовых параметров b и c. Попробуйте подставить в координату точки или в уравнение условия $b = c$ или $b = -c$. Если выражение занулилось, то оно делится соответственно на $(b - c)$ или $(b + c)$.

• Если надо преобразовать выражение и преобразовать сопряжённое выражение, то достаточно преобразовать одно из них, а потом навесить сопряжение. В частности, при проверке коллинеарности точек X, Y, Z можно до упора упрощать $\frac{x-y}{x-z}$, и только потом находить к нему сопряжённое.

• Иногда сопряжённые точки выражаются простыми формулами, а сами точки — нет. Вместо того, чтобы находить сами точки, можно переписать доказываемое в терминах сопряжённых точек. Примеры: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \bar{b} - \bar{a} = \bar{d} - \bar{c}$; точки X, Y, Z коллинеарны $\iff \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{x}-\bar{z}} \in \mathbb{R}$; $\angle PQR = \angle XYZ \iff \frac{\bar{p}-\bar{q}}{\bar{r}-\bar{q}} \cdot \frac{x-y}{z-y} \in \mathbb{R}$.

• Координаты точек на единичной окружности легко восстанавливаются по мерам дуг, так как аргументом комплексного числа x/y служит длина ориентированной дуги $\overset{\frown}{XY}$ (где X, Y на единичной окружности).

Пример: если AD и BC — перпендикулярные хорды единичной окружности, то $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC} = \pm 180°$, откуда $(b/a) \cdot (c/d) = -1$ и $d = -bc/a$.

• Полезно вводить дополнительные точки на единичной окружности (например, второй раз пересекать прямые из условия с окружностью), так как они позволяют писать простые уравнения прямых; сами точки часто могут быть найдены исходя из мер дуг.

• Коллинеарность трёх точек X, Y, Z может быть записана тремя способами: $\frac{y-x}{z-x} \in \mathbb{R}$, $\frac{x-y}{z-y} \in \mathbb{R}$, $\frac{x-z}{y-z} \in \mathbb{R}$. Выбирайте из них самый удобный.

• То же самое касается и условия коцикличности точек (вписанности четырехугольника). Условие коцикличности точек — это по сути равенство двух углов. Во-первых, можно выбрать, какую пару углов сравнивать. Во-вторых, один из углов может выражаться через меры дуг единичной окружности, что невероятно упрощает формулы.

9 класс Комплексные координаты. Памятка 25 ноября 2019

• Выработайте план решения. Разберитесь, что и в каком порядке Вы будете делать. И, прежде чем приступать к реализации плана, потратьте не менее 5-10 минут на его оптимизацию: попробуйте переопределить точки поудобнее или заменить условия на равносильные, но алгебраически более простые.

• Вводите симметричные и однородные обозначения. В финале решения получатся симметричные однородные многочлены, и их легко будет разложить.

• Считайте **аккуратно**. Не делайте два алгебраических преобразования одновременно. К примеру, если надо раскрыть скобки и привести подобные, то сначала раскройте скобки, и только потом приведите подобные. Не экономьте бумагу; не пишите на клочках, полях и в случайных местах страницы.

• В финальном тождестве **никогда** не раскрывайте скобки; наоборот, раскладывайте многочлены на множители.

• Часто какая-то точка или какое-то условие симметрично зависит от двух стартовых параметров b и c. Попробуйте подставить в координату точки или в уравнение условия $b = c$ или $b = -c$. Если выражение занулилось, то оно делится соответственно на $(b - c)$ или $(b + c)$.

• Если надо преобразовать выражение и преобразовать сопряжённое выражение, то достаточно преобразовать одно из них, а потом навесить сопряжение. В частности, при проверке коллинеарности точек X, Y, Z можно до упора упрощать $\frac{x-y}{x-z}$, и только потом находить к нему сопряжённое.

• Иногда сопряжённые точки выражаются простыми формулами, а сами точки — нет. Вместо того, чтобы находить сами точки, можно переписать доказываемое в терминах сопряжённых точек. Примеры: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \bar{b} - \bar{a} = \bar{d} - \bar{c}$; точки X, Y, Z коллинеарны $\iff \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{x}-\bar{z}} \in \mathbb{R}$; $\angle PQR = \angle XYZ \iff \frac{\bar{p}-\bar{q}}{\bar{r}-\bar{q}} \cdot \frac{x-y}{z-y} \in \mathbb{R}$.

• Координаты точек на единичной окружности легко восстанавливаются по мерам дуг, так как аргументом комплексного числа x/y служит длина ориентированной дуги $\overset{\frown}{XY}$ (где X, Y на единичной окружности).

Пример: если AD и BC — перпендикулярные хорды единичной окружности, то $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC} = \pm 180°$, откуда $(b/a) \cdot (c/d) = -1$ и $d = -bc/a$.

• Полезно вводить дополнительные точки на единичной окружности (например, второй раз пересекать прямые из условия с окружностью), так как они позволяют писать простые уравнения прямых; сами точки часто могут быть найдены исходя из мер дуг.

• Коллинеарность трёх точек X, Y, Z может быть записана тремя способами: $\frac{y-x}{z-x} \in \mathbb{R}$, $\frac{x-y}{z-y} \in \mathbb{R}$, $\frac{x-z}{y-z} \in \mathbb{R}$. Выбирайте из них самый удобный.

• То же самое касается и условия коцикличности точек (вписанности четырехугольника). Условие коцикличности точек — это по сути равенство двух углов. Во-первых, можно выбрать, какую пару углов сравнивать. Во-вторых, один из углов может выражаться через меры дуг единичной окружности, что невероятно упрощает формулы.