9 класс Комплексные координаты 25 ноября 2019

Немного формул.

1. а) Докажите, что z — действительное число тогда и только тогда, когда $z = \overline{z}$.

б) Докажите, что z — чисто мнимое число, тогда и только тогда, когда $z = -\overline{z}$.

2. Докажите, что $AB^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b})$.

3. а) Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$.

б) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B.

4. Докажите, что прямая, соединяющая различные точки A и B, лежащие на окружности $z\overline{z} = 1$, задаётся уравнением $z + ab\overline{z} = a + b$.

5. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{c-d} = -\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$.

6. а) Докажите, что $z + \overline{z}a^2 = 2a$ служит уравнением касательной к точке A окружности $z\overline{z} = 1$.

б) Докажите, что касательные к точкам A и B окружности $z\overline{z} = 1$ пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.

7. Выразите через комплексные координаты точек A, B, C на окружности $z\overline{z} = 1$ координаты точки пересечения медиан, ортоцентра, середин сторон и оснований высот треугольника ABC.

8. Докажите, что различные точки A, B, C, D лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}$. Это выражение называется *двойным отношением* чисел a, b, c, d.

9. Пусть A лежит на единичной окружности, M — произвольная точка. Докажите, что прямая AM повторно пересекает единичную окружность в точке $\frac{m-a}{1-a\overline{m}}$.

9 класс Комплексные координаты 25 ноября 2019

Немного посчитаем.

10. Теорема Ньютона. Окружность с центром O вписана в четырехугольник $ABCD$. Точки K и L — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что точки K, L, O лежат на одной прямой.

11. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Пусть H — ортоцентр ABC, а X, Y, Z — точки, симметричные P относительно BC, AC, AB соответственно. Доказать, что точки X, Y, Z, H лежат на одной прямой.

12. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке B. Точка K — проекция ортоцентра ABC на ℓ, а точка L — середина AC. Докажите, что треугольник BKL — равнобедренный.

13. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон треугольника в точках P, Q, R. Будем считать, что вписанная окружность треугольника ABC взята за единичную.

а) Выразите ортоцентр H и центр описанной окружности O треугольника ABC через p, q, r.

б) Проверьте, что центр описанной окружности O треугольника ABC лежит на прямой Эйлера треугольника PQR.

14. Проверьте формулу для точки Фейербаха: $f = \frac{pq+qr+rp}{p+q+r}$ (где вписанная окружность треугольника взята за единичную, а точки касания вписанной окружности со сторонами обозначены p, q, r).

а) Проверьте, что точка f лежит на единичной окружности.

б) Проверьте, что точка f лежит на описанной окружности серединного треугольника.

в) Проверьте, что точка f лежит на прямой Эйлера треугольника PQR.

г) Теорема Фейербаха. Докажите, что окружность Эйлера касается вписанной и трех вневписанных окружностей.