9 класс **Перестановки** 21 ноября 2019

Определение. *Инверсией* перестановки σ называется пара чисел i, j такая, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. *Четность* перестановки — это четность числа ее инверсий.

1. Сколько инверсий может быть у перестановки на n элементах?

2. а) Какова четность цикла $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$ в зависимости от k? (Числа $i_1, i_2, \ldots, i_k$ различны.)

б) Что можно сказать о четности произведения двух перестановок, если известны четности множителей?

в) Перестановка раскладывается в произведение k циклов длин $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Найдите ее четность.

3. а) Докажите, что любую перестановку можно получить путем перемножения циклов длины 2.

б) Опишите все перестановки, которые можно получить путем перемножения циклов длины 3.

4. На полке в перепутанном порядке стоят n пронумерованных томов собрания сочинений Льва Толстого. Каждую минуту библиотекарь меняет местами

а) некоторые две соседние книги; **б)** две произвольные книги.

За какое наименьшее время библиотекарь можно гарантированно расставить книги в порядке возрастания?

5. Игра «пятнашки». В квадрате 4×4 расположены 15 фишек размера 1×1, пронумерованных числами от 1 до 15. За один ход можно передвигать на пустую клетку соседнюю с ней по стороне фишку.

а) Можно ли получить из правой конфигурации левую?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

б) Докажите, что из любой начальной конфигурации можно получить одну из двух вышеприведенных конфигураций.

6. Король решил перевесить портреты своих предшественников в круглой башне замка. Он приказал за один раз менять местами только два портрета, висящие рядом, причем это не должны быть портреты двух королей, царствующих непосредственно друг за другом. Два расположения, отличающиеся поворотом круга, король считает одинаковыми. Докажите, что король может добиться любого нового расположения портретов.

7. В городе разрешены только парные обмены квартир. Любой житель может принять участие не более чем в одном обмене за день. Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

8. Барон Мюнхгаузен утверждает, что придумал такую комбинацию вращений кубика Рубика, что из любого состояния кубика можно перейти в собранное, повторив эту комбинацию достаточное число раз. Не привирает ли барон?

9 класс **Перестановки** 21 ноября 2019

Определение. *Инверсией* перестановки σ называется пара чисел i, j такая, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. *Четность* перестановки — это четность числа ее инверсий.

1. Сколько инверсий может быть у перестановки на n элементах?

2. а) Какова четность цикла $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$ в зависимости от k? (Числа $i_1, i_2, \ldots, i_k$ различны.)

б) Что можно сказать о четности произведения двух перестановок, если известны четности множителей?

в) Перестановка раскладывается в произведение k циклов длин $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Найдите ее четность.

3. а) Докажите, что любую перестановку можно получить путем перемножения циклов длины 2.

б) Опишите все перестановки, которые можно получить путем перемножения циклов длины 3.

4. На полке в перепутанном порядке стоят n пронумерованных томов собрания сочинений Льва Толстого. Каждую минуту библиотекарь меняет местами

а) некоторые две соседние книги; **б)** две произвольные книги.

За какое наименьшее время библиотекарь можно гарантированно расставить книги в порядке возрастания?

5. Игра «пятнашки». В квадрате 4×4 расположены 15 фишек размера 1×1, пронумерованных числами от 1 до 15. За один ход можно передвигать на пустую клетку соседнюю с ней по стороне фишку.

а) Можно ли получить из правой конфигурации левую?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

б) Докажите, что из любой начальной конфигурации можно получить одну из двух вышеприведенных конфигураций.

6. Король решил перевесить портреты своих предшественников в круглой башне замка. Он приказал за один раз менять местами только два портрета, висящие рядом, причем это не должны быть портреты двух королей, царствующих непосредственно друг за другом. Два расположения, отличающиеся поворотом круга, король считает одинаковыми. Докажите, что король может добиться любого нового расположения портретов.

7. В городе разрешены только парные обмены квартир. Любой житель может принять участие не более чем в одном обмене за день. Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

8. Барон Мюнхгаузен утверждает, что придумал такую комбинацию вращений кубика Рубика, что из любого состояния кубика можно перейти в собранное, повторив эту комбинацию достаточное число раз. Не привирает ли барон?