9 класс **Комплексная геометрия** 18 ноября 2019

1. На плоскости задана система комплексных координат. Какой формулой вида $z' = f(z)$ задаётся параллельный перенос? А поворот? А гомотетия? А поворотная гомотетия?

2. Докажите, что формула $f(z) = kz + b$ (где $k \neq 0$) задаёт поворотную гомотетию либо параллельный перенос. Каковы необходимые и достаточные условия на коэффициенты k и b того, что это преобразование является параллельным переносом? А поворотом? А гомотетией?

3. а) Докажите, что повороты и параллельные переносы описывают все движения плоскости, сохраняющие ориентацию.

б) Докажите, что для описания всех сохраняющих ориентацию преобразований подобия плоскости нужно ещё добавить поворотные гомотетии.

4. Теорема о трёх центрах гомотетии. Докажите, что если композиция трёх гомотетий является тождественным преобразованием, то центры гомотетий лежат на одной прямой, а произведение коэффициентов равно 1.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABXP$ и $ACYQ$ соответственно. Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна PQ и в 2 раза меньше PQ.

6. На сторонах выпуклого четырёхугольника во внешнюю сторону построили квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны по длине и перпендикулярны.

7. На окружности $z\overline{z} = 1$ отмечены различные точки A, B, C, D координатами a, b, c, d соответственно. Докажите, что $AB \perp CD \iff ab + cd = 0$.

Указание. Если в задаче фигурируют углы 60° *или* 120° *(в частности, правильные треугольники), то полезно расссматривать переменные* $\xi\ :\ \xi^2+\xi+1=0$ *или* $\zeta\ :\ \zeta^2-\zeta+1=0$. *Нетрудно заметить, что* $\xi^6 = 1, \zeta^3 = 1$. *Эти переменные кодируют повороты на* 60° *и* 120° *соотвественно.*

8. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.

9. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1, FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.

9 класс **Комплексная геометрия** 18 ноября 2019

1. На плоскости задана система комплексных координат. Какой формулой вида $z' = f(z)$ задаётся параллельный перенос? А поворот? А гомотетия? А поворотная гомотетия?

2. Докажите, что формула $f(z) = kz + b$ (где $k \neq 0$) задаёт поворотную гомотетию либо параллельный перенос. Каковы необходимые и достаточные условия на коэффициенты k и b того, что это преобразование является параллельным переносом? А поворотом? А гомотетией?

3. а) Докажите, что повороты и параллельные переносы описывают все движения плоскости, сохраняющие ориентацию.

б) Докажите, что для описания всех сохраняющих ориентацию преобразований подобия плоскости нужно ещё добавить поворотные гомотетии.

4. Теорема о трёх центрах гомотетии. Докажите, что если композиция трёх гомотетий является тождественным преобразованием, то центры гомотетий лежат на одной прямой, а произведение коэффициентов равно 1.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABXP$ и $ACYQ$ соответственно. Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна PQ и в 2 раза меньше PQ.

6. На сторонах выпуклого четырёхугольника во внешнюю сторону построили квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны по длине и перпендикулярны.

7. На окружности $z\overline{z} = 1$ отмечены различные точки A, B, C, D координатами a, b, c, d соответственно. Докажите, что $AB \perp CD \iff ab + cd = 0$.

Указание. Если в задаче фигурируют углы 60° *или* 120° *(в частности, правильные треугольники), то полезно расссматривать переменные* $\xi\ :\ \xi^2+\xi+1=0$ *или* $\zeta\ :\ \zeta^2-\zeta+1=0$. *Нетрудно заметить, что* $\xi^6 = 1, \zeta^3 = 1$. *Эти переменные кодируют повороты на* 60° *и* 120° *соотвественно.*

8. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.

9. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1, FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.