

1. В стране  $n$  городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

2. В некоторой стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Оказалось, что из любого города, проехав по дорогам, можно попасть в любой другой. Докажите, что можно проехать по городам, побывав в каждом ровно по одному разу, и вернуться в начальный город.

3. В стране 1000 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

4. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках найдутся хотя бы сто с угловой мерой не более  $120^\circ$ .

5. У профессора есть  $n$  утверждений  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Каждый день он выбирает своего аспиранта и даёт ему тему диссертационной работы: «Доказать, что из  $A_i$  следует  $A_j$ ». Все аспиранты — гении, поэтому они мгновенно это доказывают. Каждая новая диссертация не должна быть непосредственным логическим следствием ранее доказанных работ (например, если было доказано, что из  $A_1$  следует  $A_2$ , из  $A_2$  следует  $A_3$ , то нельзя просить доказать, что из  $A_1$  следует  $A_3$ ). Какое наибольшее число аспирантов может быть у профессора, чтобы ему хватило тем?

6. В Москве двустороннее движение. И вот уже два года подряд ремонтируют все дороги. В первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. Во второй год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в каждый момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Москве можно ввести одностороннее движение так, что из каждой точки города удастся проехать в любую другую точку.

7. Для обороны скопления из 300 звёзд Дарт Вейдер хочет соединить некоторые из них межзвёздными туннелями. Известно, что повстанцам удастся уничтожить либо один туннель, либо два туннеля, не ведущих к одной и той же звезде. Какое наименьшее количество туннелей должен установить Дарт Вейдер, чтобы после атаки повстанцев можно было добраться по оставшимся туннелям от любой звезды до любой другой? (Две звезды могут быть соединены не более чем одним туннелем; каждый туннель позволяет перемещаться по нему в обе стороны.)

8. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более  $N$  различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечётной длины. Докажите, что страну можно разделить на  $N + 2$  республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.

1. В стране  $n$  городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

2. В некоторой стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Оказалось, что из любого города, проехав по дорогам, можно попасть в любой другой. Докажите, что можно проехать по городам, побывав в каждом ровно по одному разу, и вернуться в начальный город.

3. В стране 1000 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

4. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках найдутся хотя бы сто с угловой мерой не более  $120^\circ$ .

5. У профессора есть  $n$  утверждений  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Каждый день он выбирает своего аспиранта и даёт ему тему диссертационной работы: «Доказать, что из  $A_i$  следует  $A_j$ ». Все аспиранты — гении, поэтому они мгновенно это доказывают. Каждая новая диссертация не должна быть непосредственным логическим следствием ранее доказанных работ (например, если было доказано, что из  $A_1$  следует  $A_2$ , из  $A_2$  следует  $A_3$ , то нельзя просить доказать, что из  $A_1$  следует  $A_3$ ). Какое наибольшее число аспирантов может быть у профессора, чтобы ему хватило тем?

6. В Москве двустороннее движение. И вот уже два года подряд ремонтируют все дороги. В первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. Во второй год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в каждый момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Москве можно ввести одностороннее движение так, что из каждой точки города удастся проехать в любую другую точку.

7. Для обороны скопления из 300 звёзд Дарт Вейдер хочет соединить некоторые из них межзвёздными туннелями. Известно, что повстанцам удастся уничтожить либо один туннель, либо два туннеля, не ведущих к одной и той же звезде. Какое наименьшее количество туннелей должен установить Дарт Вейдер, чтобы после атаки повстанцев можно было добраться по оставшимся туннелям от любой звезды до любой другой? (Две звезды могут быть соединены не более чем одним туннелем; каждый туннель позволяет перемещаться по нему в обе стороны.)

8. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более  $N$  различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечётной длины. Докажите, что страну можно разделить на  $N + 2$  республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.