9 класс **Комплексные числа — 2** 24 октября 2019

1. Основная теорема алгебры. Любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами (в том числе, и с действительными) имеет комплексный корень.

Достаточно доказать теорему для многочлена со старшим коэффициентом 1. Пусть он имеет вид $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. Будем считать $a_0 \neq 0$.

Идея. Точка z обходит один раз окружность радиуса R с центром в нуле против часовой стрелки. В зависимости от этого как-то движутся точка z^n (*Дама*) и точка $P(z)$ (*Собачка*). При «большом» R Собачка находится рядом с Дамой и делает много оборотов вокруг точки O, а при «маленьком» R — мало. Поэтому при каком-то промежуточном значении R Собачка должна будет пройти через O.

а) Докажите, что Дама движется по окружности радиуса R^n и обходит её n раз.

б) Докажите, что при $R_0 = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0| + 1$ расстояние между Дамой и Собачкой $|P(z) - z^n|$ меньше расстояния от Дамы до точки O.

Начнём стягивать радиус начальной окружности от R_0 до нуля. Радиус окружности, по которой гуляет Дама, уменьшается, но она по-прежнему будет проходить n раз вокруг точки O. Траектория движения Собачки — непрерывная замкнутая линия — меняется непрерывно, и при радиусе, близком к 0, она близка к точке a_0.

в) Рассмотрев функцию, равную числу обходов Собачки вокруг точки O, докажите, что при некотором значении радиуса Собачка пройдёт через O.

Следствие. У любого непостоянного многочлена n-й степени ровно n комплексных корней (с учётом кратности).

2. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ (т.е. $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами).

а) Докажите, что если $P(z) = 0$, то и $P(\overline{z}) = 0$.

б) Докажите, что $P(x)$ представляется в виде произведения многочленов с действительными коэффициентами, каждый из которых не выше второй степени.

3. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает только неотрицательные значения. Докажите, что найдутся многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(x) = Q^2(x) + R^2(x)$.

4. Докажите, что $x^{666}+x^{555}+x^{444}+x^{333}+x^{222}+x^{111}+1 \,\vdots\, x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

5. а) Разложите на множители с действительными коэффициентами (все они должны быть не выше второй степени) многочлен $x^{2n} - 1$.

б) Докажите, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \cos\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

6. При каких натуральных n выражение $a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b)$ делится на $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac$?

9 класс **Комплексные числа — 2** 24 октября 2019

1. Основная теорема алгебры. Любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами (в том числе, и с действительными) имеет комплексный корень.

Достаточно доказать теорему для многочлена со старшим коэффициентом 1. Пусть он имеет вид $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. Будем считать $a_0 \neq 0$.

Идея. Точка z обходит один раз окружность радиуса R с центром в нуле против часовой стрелки. В зависимости от этого как-то движутся точка z^n (*Дама*) и точка $P(z)$ (*Собачка*). При «большом» R Собачка находится рядом с Дамой и делает много оборотов вокруг точки O, а при «маленьком» R — мало. Поэтому при каком-то промежуточном значении R Собачка должна будет пройти через O.

а) Докажите, что Дама движется по окружности радиуса R^n и обходит её n раз.

б) Докажите, что при $R_0 = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0| + 1$ расстояние между Дамой и Собачкой $|P(z) - z^n|$ меньше расстояния от Дамы до точки O.

Начнём стягивать радиус начальной окружности от R_0 до нуля. Радиус окружности, по которой гуляет Дама, уменьшается, но она по-прежнему будет проходить n раз вокруг точки O. Траектория движения Собачки — непрерывная замкнутая линия — меняется непрерывно, и при радиусе, близком к 0, она близка к точке a_0.

в) Рассмотрев функцию, равную числу обходов Собачки вокруг точки O, докажите, что при некотором значении радиуса Собачка пройдёт через O.

Следствие. У любого непостоянного многочлена n-й степени ровно n комплексных корней (с учётом кратности).

2. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ (т.е. $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами).

а) Докажите, что если $P(z) = 0$, то и $P(\overline{z}) = 0$.

б) Докажите, что $P(x)$ представляется в виде произведения многочленов с действительными коэффициентами, каждый из которых не выше второй степени.

3. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает только неотрицательные значения. Докажите, что найдутся многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(x) = Q^2(x) + R^2(x)$.

4. Докажите, что $x^{666}+x^{555}+x^{444}+x^{333}+x^{222}+x^{111}+1 \,\vdots\, x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

5. а) Разложите на множители с действительными коэффициентами (все они должны быть не выше второй степени) многочлен $x^{2n} - 1$.

б) Докажите, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \cos\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

6. При каких натуральных n выражение $a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b)$ делится на $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac$?