9 класс **Комбинаторика** 21 октября 2019

1. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 чёрная рубашка. Найдите наименьшее k такое, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k чёрных рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся чёрные рубашки тоже висели подряд.

2. Из квадрата 300×300 вырезано несколько клеток, не граничащих ни по стороне, ни по углу. Вова хочет вырезать из оставшегося куска один уголок из трёх клеток. Вова посчитал все способы это сделать, и получил ровно 48000 способов. Докажите, что он обсчитался.

3. На доске выписан ряд чисел: $1, 2, \ldots, 2018, 2019$. За одну операцию разрешается выбрать три подряд идущих ненулевых числа a, b, c и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие операции?

4. Шахматная фигура *пулемётчик* бьёт все клетки, как ладья, но только в одном из четырёх направлений. Какое наибольшее число не бьющих друг друга пулемётчиков можно поставить на доску 20×20?

5. В колоде 2^n-1 карт. Ее тасуют следующим образом: верхние 2^{n-1} и нижние $2^{n-1}-1$ смешиваются через 1, сохраняя порядок (верхняя карта при этом остаётся на месте). Через какое наименьшее количество таких операций колода придёт в первоначальное положение?

6. Дан граф с V вершинами и E рёбрами. Докажите, что из него можно удалить хотя бы $\frac{E-V}{2}$ рёбер так, чтобы степень каждой вершины уменьшилась не более, чем вдвое.

7. По кругу стоят 100 чисел: чередующиеся 1 и -1 (обоих по 50). Каждую минуту Игорь стирает какое-нибудь из этих чисел и записывает в тетрадку сумму этого числа и двух соседних. Докажите, что через 98 минут произведение чисел, записанных в тетрадке, будет положительным.

8. Вася вписывает в клетки таблицы 101×101 числа от 1 до 101^2 по одному разу. Петя выбирает клетку доски, ставит на неё фишку, и хочет сделать как можно больше ходов так, чтобы число под фишкой постоянно увеличивалось. За один ход Петя может передвинуть фишку в любую клетку квадрата 5×5 с центром в клетке, где сейчас стоит фишка (фишка всегда должна оставаться в пределах доски). Какое наибольшее число ходов заведомо сможет сделать Петя, как бы Вася ни расставлял числа?

9. *Словом* назовём последовательность, состоящую из n букв «a», n букв «b» и n букв «c». *Транспозицией* назовём перестановку в слове двух соседних букв. Докажите, что для любого слова X существует слово Y, которое невозможно получить из X менее чем за $[3n^2/2]$ транспозиций.

10. В графе степень каждой вершины не меньше 3. Докажите, что в этом графе существует цикл, длина которого не делится на 3.

9 класс **Комбинаторика** 21 октября 2019

1. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 чёрная рубашка. Найдите наименьшее k такое, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k чёрных рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся чёрные рубашки тоже висели подряд.

2. Из квадрата 300×300 вырезано несколько клеток, не граничащих ни по стороне, ни по углу. Вова хочет вырезать из оставшегося куска один уголок из трёх клеток. Вова посчитал все способы это сделать, и получил ровно 48000 способов. Докажите, что он обсчитался.

3. На доске выписан ряд чисел: $1, 2, \ldots, 2018, 2019$. За одну операцию разрешается выбрать три подряд идущих ненулевых числа a, b, c и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие операции?

4. Шахматная фигура *пулемётчик* бьёт все клетки, как ладья, но только в одном из четырёх направлений. Какое наибольшее число не бьющих друг друга пулемётчиков можно поставить на доску 20×20?

5. В колоде 2^n-1 карт. Ее тасуют следующим образом: верхние 2^{n-1} и нижние $2^{n-1}-1$ смешиваются через 1, сохраняя порядок (верхняя карта при этом остаётся на месте). Через какое наименьшее количество таких операций колода придёт в первоначальное положение?

6. Дан граф с V вершинами и E рёбрами. Докажите, что из него можно удалить хотя бы $\frac{E-V}{2}$ рёбер так, чтобы степень каждой вершины уменьшилась не более, чем вдвое.

7. По кругу стоят 100 чисел: чередующиеся 1 и -1 (обоих по 50). Каждую минуту Игорь стирает какое-нибудь из этих чисел и записывает в тетрадку сумму этого числа и двух соседних. Докажите, что через 98 минут произведение чисел, записанных в тетрадке, будет положительным.

8. Вася вписывает в клетки таблицы 101×101 числа от 1 до 101^2 по одному разу. Петя выбирает клетку доски, ставит на неё фишку, и хочет сделать как можно больше ходов так, чтобы число под фишкой постоянно увеличивалось. За один ход Петя может передвинуть фишку в любую клетку квадрата 5×5 с центром в клетке, где сейчас стоит фишка (фишка всегда должна оставаться в пределах доски). Какое наибольшее число ходов заведомо сможет сделать Петя, как бы Вася ни расставлял числа?

9. *Словом* назовём последовательность, состоящую из n букв «a», n букв «b» и n букв «c». *Транспозицией* назовём перестановку в слове двух соседних букв. Докажите, что для любого слова X существует слово Y, которое невозможно получить из X менее чем за $[3n^2/2]$ транспозиций.

10. В графе степень каждой вершины не меньше 3. Докажите, что в этом графе существует цикл, длина которого не делится на 3.