9 класс — Геометрический разнобой — 14 октября 2019

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

2. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

3. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

4. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке T. Пусть ω — окружность с центром в точке T и радиусом TC. Прямая l, проходящая через точку D, пересекает ω в точках K и N. Докажите, что $\angle KAD = \angle NAD$.

5. Сторона BC треугольника ABC касается вписанной в него окружности в точке D. Докажите, что центр этой окружности лежит на прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

6. На окружности даны точки A и B. На окружности берется произвольная точка M и из середины отрезка BM проводится перпендикуляр к прямой AM. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через некоторую точку, не зависящую от выбора точки M.

7. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая l пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает l в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

8. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

9. Дан треугольник ABC. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC в точке A, пересекает сторону AB в точке K, а также пересекает сторону BC в точке M. Касательная CL к окружности ω такова, что отрезок KL пересекает сторону BC в точке T. Докажите, что отрезок BT равен по длине касательной из точки B к ω.

9 класс — Геометрический разнобой — 14 октября 2019

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

2. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

3. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

4. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке T. Пусть ω — окружность с центром в точке T и радиусом TC. Прямая l, проходящая через точку D, пересекает ω в точках K и N. Докажите, что $\angle KAD = \angle NAD$.

5. Сторона BC треугольника ABC касается вписанной в него окружности в точке D. Докажите, что центр этой окружности лежит на прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

6. На окружности даны точки A и B. На окружности берется произвольная точка M и из середины отрезка BM проводится перпендикуляр к прямой AM. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через некоторую точку, не зависящую от выбора точки M.

7. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая l пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает l в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

8. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

9. Дан треугольник ABC. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC в точке A, пересекает сторону AB в точке K, а также пересекает сторону BC в точке M. Касательная CL к окружности ω такова, что отрезок KL пересекает сторону BC в точке T. Докажите, что отрезок BT равен по длине касательной из точки B к ω.