9 класс **Комплексные числа** 10 октября 2019

Определение. *Комплексные числа* — это числа вида $z = a + bi$, где a и b — действительные, а i — *мнимая единица*, т.е. число, квадрат которого равен -1. *Сопряжённым* числом к $z = a + bi$ называют $\overline{z} = a - bi$. *Модулем* числа $z = a + bi$ называют число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

0. Докажите, что $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$; $\overline{\overline{z}} = z$.

Тригонометрическая форма. Для любого комплексного числа $z \neq 0$ справедливо равенство $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ и φ — соответственно модуль и аргумент числа z.

Факт. При произведении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При отношении — модули делятся, а аргументы вычитаются. Отсюда следует и *формула Муавра*: если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, где n – натуральное.

1. Вычислите $\frac{(1-i)^{77}(\sqrt{3}+i)^{50}}{(1+i)^{179}}$.

2. Найдите все значения корней $\sqrt[4]{1}$; $\sqrt[3]{2-2i}$; $\sqrt[8]{i\sqrt{3}-1}$.

3. Как на комплексной плоскости расположены корни уравнения $z^n = 1$? Чему равно их произведение? А сумма? А сумма k-х степеней?

4. Комплексные числа a, b, c имеют модуль 1. Найдите $|\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}|$.

5. Даны комплексные числа a, b, c. Докажите, что $Re(a-c)(\overline{c}-\overline{b}) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $|c - \frac{a+b}{2}| \leqslant \frac{1}{2}|a-b|$.

6. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости в вершинах выпуклого n-угольника. Точка z такова, что $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

7. Вычислите сумму **а)** $1 + \cos\varphi + \ldots + \cos n\varphi$; **б)** $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

8. Вычислите сумму **а)** $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; **б)** $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots$

9. а) Назовём корень из единицы n-й степени, равный ξ, *примитивным*, если $\xi^m \neq 1$ для всех натуральных m, меньших n. Найдите значение выражения $(1-\xi)(1-\xi^2)(1-\xi^3)\ldots(1-\xi^{n-1})$.

б) В окружность радиуса 1 вписан правильный n-угольник. Найдите произведение всех сторон и диагоналей, проведённых из одной вершины.

10. Конечное множество M комплексных чисел таково, что если $z \in M$, то и $z^n \in M$ при любом натуральном n. Чему может быть равна сумма всех элементов M?

9 класс **Комплексные числа** 10 октября 2019

Определение. *Комплексные числа* — это числа вида $z = a + bi$, где a и b — действительные, а i — *мнимая единица*, т.е. число, квадрат которого равен -1. *Сопряжённым* числом к $z = a + bi$ называют $\overline{z} = a - bi$. *Модулем* числа $z = a + bi$ называют число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

0. Докажите, что $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$; $\overline{\overline{z}} = z$.

Тригонометрическая форма. Для любого комплексного числа $z \neq 0$ справедливо равенство $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ и φ — соответственно модуль и аргумент числа z.

Факт. При произведении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При отношении — модули делятся, а аргументы вычитаются. Отсюда следует и *формула Муавра*: если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, где n – натуральное.

1. Вычислите $\frac{(1-i)^{77}(\sqrt{3}+i)^{50}}{(1+i)^{179}}$.

2. Найдите все значения корней $\sqrt[4]{1}$; $\sqrt[3]{2-2i}$; $\sqrt[8]{i\sqrt{3}-1}$.

3. Как на комплексной плоскости расположены корни уравнения $z^n = 1$? Чему равно их произведение? А сумма? А сумма k-х степеней?

4. Комплексные числа a, b, c имеют модуль 1. Найдите $|\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}|$.

5. Даны комплексные числа a, b, c. Докажите, что $Re(a-c)(\overline{c}-\overline{b}) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $|c - \frac{a+b}{2}| \leqslant \frac{1}{2}|a-b|$.

6. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости в вершинах выпуклого n-угольника. Точка z такова, что $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

7. Вычислите сумму **а)** $1 + \cos\varphi + \ldots + \cos n\varphi$; **б)** $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

8. Вычислите сумму **а)** $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; **б)** $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots$

9. а) Назовём корень из единицы n-й степени, равный ξ, *примитивным*, если $\xi^m \neq 1$ для всех натуральных m, меньших n. Найдите значение выражения $(1-\xi)(1-\xi^2)(1-\xi^3)\ldots(1-\xi^{n-1})$.

б) В окружность радиуса 1 вписан правильный n-угольник. Найдите произведение всех сторон и диагоналей, проведённых из одной вершины.

10. Конечное множество M комплексных чисел таково, что если $z \in M$, то и $z^n \in M$ при любом натуральном n. Чему может быть равна сумма всех элементов M?