9 класс **Вектора** 7 октября 2019

1. Даны параллелограммы $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$. Обозначим через S_i точку пересечения медиан треугольника $A_iB_iC_i$. Докажите, что $S_1S_2S_3S_4$ — параллелограмм (возможно, вырожденный).

2. Пусть M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD, DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$. F — середина MP, G — середина NQ. Докажите, что $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

3. Докажите, что точка Z лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда для некоторого числа t и любой точки O выполнено $\overrightarrow{OZ} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{OB}$.

4. Сумма $n \geqslant 3$ векторов равна $\overrightarrow{0}$, и среди них нет коллинеарных.

а) Докажите, что из них можно составить выпуклый n-угольник.

б) Сколько существует таких попарно неравных n-угольников?

5. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ точка H_a — ортоцентр треугольника BCD, точки H_b, H_c, H_d определяются аналогично. Докажите, что прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в одной точке.

6. Можно ли на всех рёбрах какой-нибудь 2019-угольной пирамиды расставить стрелки так, чтобы сумма всех векторов была равна $\overrightarrow{0}$?

7. Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведённые отрезки равны.

8. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Докажите, что можно выбрать несколько векторов (быть может, один), длина суммы которых больше 1.

9. На плоскости даны $n \geqslant 2$ точек. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди (начинает Петя). За ход можно провести вектор с началом и концом в этих точках, если между этими точками вектор пока не проведён. Если в какой-то момент сумма векторов равна $\overrightarrow{0}$, то выигрывает Вася, иначе выигрывает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

10. *Центроидом* четырёхугольника назовём точку пересечения двух прямых, соединяющих середины его противопололожных сторон. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность с центром O. Известно, что $AB = DE$ и $BC = EF$. Пусть X, Y, Z — центроиды четырёхугольников $ABDE$, $BCEF$, $CDFA$ соответственно. Докажите, что O — ортоцентр треугольника XYZ.

11. а) Дан многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Пусть $B_1, \ldots B_n$ — середины его сторон $A_1A_2, \ldots A_nA_1$ соответственно. От каждой точки B_i отложим во внешнюю сторону отрезок B_iC_i, перпендикулярный соответствующей стороне многоугольника и имеющий длину, равную длине этой стороны. Докажите, что $\overrightarrow{B_1C_1} + \ldots \overrightarrow{B_nC_n} = \overrightarrow{0}$.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для многогранника.

9 класс **Вектора** 7 октября 2019

1. Даны параллелограммы $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$. Обозначим через S_i точку пересечения медиан треугольника $A_iB_iC_i$. Докажите, что $S_1S_2S_3S_4$ — параллелограмм (возможно, вырожденный).

2. Пусть M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD, DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$. F — середина MP, G — середина NQ. Докажите, что $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

3. Докажите, что точка Z лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда для некоторого числа t и любой точки O выполнено $\overrightarrow{OZ} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{OB}$.

4. Сумма $n \geqslant 3$ векторов равна $\overrightarrow{0}$, и среди них нет коллинеарных.

а) Докажите, что из них можно составить выпуклый n-угольник.

б) Сколько существует таких попарно неравных n-угольников?

5. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ точка H_a — ортоцентр треугольника BCD, точки H_b, H_c, H_d определяются аналогично. Докажите, что прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в одной точке.

6. Можно ли на всех рёбрах какой-нибудь 2019-угольной пирамиды расставить стрелки так, чтобы сумма всех векторов была равна $\overrightarrow{0}$?

7. Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведённые отрезки равны.

8. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Докажите, что можно выбрать несколько векторов (быть может, один), длина суммы которых больше 1.

9. На плоскости даны $n \geqslant 2$ точек. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди (начинает Петя). За ход можно провести вектор с началом и концом в этих точках, если между этими точками вектор пока не проведён. Если в какой-то момент сумма векторов равна $\overrightarrow{0}$, то выигрывает Вася, иначе выигрывает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

10. *Центроидом* четырёхугольника назовём точку пересечения двух прямых, соединяющих середины его противопололожных сторон. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность с центром O. Известно, что $AB = DE$ и $BC = EF$. Пусть X, Y, Z — центроиды четырёхугольников $ABDE$, $BCEF$, $CDFA$ соответственно. Докажите, что O — ортоцентр треугольника XYZ.

11. а) Дан многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Пусть $B_1, \ldots B_n$ — середины его сторон $A_1A_2, \ldots A_nA_1$ соответственно. От каждой точки B_i отложим во внешнюю сторону отрезок B_iC_i, перпендикулярный соответствующей стороне многоугольника и имеющий длину, равную длине этой стороны. Докажите, что $\overrightarrow{B_1C_1} + \ldots \overrightarrow{B_nC_n} = \overrightarrow{0}$.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для многогранника.