9 класс **Зацикливание и периодичность** 3 октября 2019

1. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, $0 < m < n$. Докажите, что если $(n, 10) = 1$, то эта дробь — чисто периодическая, причем длина ее минимального периода равна наименьшему натуральному d такому, что $10^d - 1$ кратно n.

2. Последовательность чисел $\{x_n\}$ такова, что $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. Докажите, что эта последовательность периодическая (начиная с некоторого места) тогда и только тогда, когда $x_1 \in \mathbb{Q}$.

3. Известно, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — чисто периодические последовательности с минимальными длинами периода 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода последовательности $\{a_n + b_n\}$?

4. Клетки таблицы 2×2019 заполнили действительными числами так, что в верхней строке стоят 2019 различных чисел, а в нижней строке стоят те же 2019 чисел, но в другом порядке. Известно, что в каждом из 2019 столбцов таблицы записаны два разных числа, сумма которых рациональна. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы?

5. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ определена следующим образом: $a_{n+1} = a_n + b_n$, где b_n — последняя цифра числа a_n. Докажите, что если a_1 не делится на 5, то эта последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

6. Есть неограниченное число чёрных и белых кубиков. Нужно построить из них башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. При любом ли нижнем заданном слое кубиков такую башню конечной высоты можно построить?

7. В каждой целой точке числовой оси расположена лампочка с кнопкой, при нажатии которой лампочка меняет состояние: загорается или гаснет. Вначале все лампочки погашены. Задано конечное непустое множество целых чисел — *шаблон* S. Его можно перемещать вдоль числовой оси как жёсткую фигуру и, приложив в любом месте, поменять состояние множества всех лампочек, закрытых шаблоном. Докажите, что при любом S за несколько операций можно добиться того, что будут гореть ровно две лампочки.

8. Две команды из m и n игроков следующим образом проводят турнир по настольному теннису. Сначала какие-то два игрока из разных команд начинают играть между собой, а все остальные игроки выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры первый человек в очереди заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что если $m \neq n$, то рано или поздно каждый игрок первой команды сыграет с каждым игроком второй команды.

9. На проволоку в форме окружности насажено несколько разноцветных шариков. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями: некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что рано или поздно расположение шариков на окружности повторится с исходным.

9 класс **Зацикливание и периодичность** 3 октября 2019

1. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, $0 < m < n$. Докажите, что если $(n, 10) = 1$, то эта дробь — чисто периодическая, причем длина ее минимального периода равна наименьшему натуральному d такому, что $10^d - 1$ кратно n.

2. Последовательность чисел $\{x_n\}$ такова, что $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. Докажите, что эта последовательность периодическая (начиная с некоторого места) тогда и только тогда, когда $x_1 \in \mathbb{Q}$.

3. Известно, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — чисто периодические последовательности с минимальными длинами периода 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода последовательности $\{a_n + b_n\}$?

4. Клетки таблицы 2×2019 заполнили действительными числами так, что в верхней строке стоят 2019 различных чисел, а в нижней строке стоят те же 2019 чисел, но в другом порядке. Известно, что в каждом из 2019 столбцов таблицы записаны два разных числа, сумма которых рациональна. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы?

5. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ определена следующим образом: $a_{n+1} = a_n + b_n$, где b_n — последняя цифра числа a_n. Докажите, что если a_1 не делится на 5, то эта последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

6. Есть неограниченное число чёрных и белых кубиков. Нужно построить из них башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. При любом ли нижнем заданном слое кубиков такую башню конечной высоты можно построить?

7. В каждой целой точке числовой оси расположена лампочка с кнопкой, при нажатии которой лампочка меняет состояние: загорается или гаснет. Вначале все лампочки погашены. Задано конечное непустое множество целых чисел — *шаблон* S. Его можно перемещать вдоль числовой оси как жёсткую фигуру и, приложив в любом месте, поменять состояние множества всех лампочек, закрытых шаблоном. Докажите, что при любом S за несколько операций можно добиться того, что будут гореть ровно две лампочки.

8. Две команды из m и n игроков следующим образом проводят турнир по настольному теннису. Сначала какие-то два игрока из разных команд начинают играть между собой, а все остальные игроки выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры первый человек в очереди заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что если $m \neq n$, то рано или поздно каждый игрок первой команды сыграет с каждым игроком второй команды.

9. На проволоку в форме окружности насажено несколько разноцветных шариков. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями: некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что рано или поздно расположение шариков на окружности повторится с исходным.