9 класс | Теория чисел | 26 сентября 2019

1. Дано целое n. Докажите, что число $n(2n+1)(3n+1)\dots(2019n+1)$ делится на каждое простое число, меньшее 2019.

2. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального числа k существует такое натуральное число n, что $P(1)+P(2)+\ldots+P(n)$ делится на k.

3. а) Имеется 17 ящиков. В одном из них лежит одна монета, во всех остальных ничего нет. Разрешается выбрать любые 11 ящиков и добавить туда по одной монете. Докажите, что такими операциями можно уравнять число монет во всех ящиках.

б) Имеется 17 ящиков. В каждом лежит некоторое число монет. Разрешается выбрать любые 11 ящиков и добавить в каждый из выбранных ящиков по монете. Докажите, что такими операциями можно уравнять число монет в ящиках.

4. а) По окружности стоят 1 единица и $p-1$ ноль (p – простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что рано или поздно все числа будут делиться на p.

б) По окружности стоят p целых чисел (p – простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что рано или поздно все числа будут делиться на p.

в) По окружности стоят p целых чисел (p – простое). Перед каждым ходом выбирается некое число k и из каждого числа вычитается его $k-$й сосед слева. Докажите, что рано или поздно все числа будут делиться на p.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab+9b+81$ и $bc+9c+81$ делятся на 101. Докажите, что $ca+9a+81$ тоже делится на 101.

6. Найдите все натуральные a такие, что для любого натурального n число $4(a^n+1)$ является точным кубом.

7. Дано натуральное число a. Докажите, что среди чисел вида 2^n-a найдутся числа со сколь угодно большими простыми делителями.

9 класс | Теория чисел | 26 сентября 2019

1. Дано целое n. Докажите, что число $n(2n+1)(3n+1)\dots(2019n+1)$ делится на каждое простое число, меньшее 2019.

2. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального числа k существует такое натуральное число n, что $P(1)+P(2)+\ldots+P(n)$ делится на k.

3. а) Имеется 17 ящиков. В одном из них лежит одна монета, во всех остальных ничего нет. Разрешается выбрать любые 11 ящиков и добавить туда по одной монете. Докажите, что такими операциями можно уравнять число монет во всех ящиках.

б) Имеется 17 ящиков. В каждом лежит некоторое число монет. Разрешается выбрать любые 11 ящиков и добавить в каждый из выбранных ящиков по монете. Докажите, что такими операциями можно уравнять число монет в ящиках.

4. а) По окружности стоят 1 единица и $p-1$ ноль (p – простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что рано или поздно все числа будут делиться на p.

б) По окружности стоят p целых чисел (p – простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что рано или поздно все числа будут делиться на p.

в) По окружности стоят p целых чисел (p – простое). Перед каждым ходом выбирается некое число k и из каждого числа вычитается его $k-$й сосед слева. Докажите, что рано или поздно все числа будут делиться на p.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab+9b+81$ и $bc+9c+81$ делятся на 101. Докажите, что $ca+9a+81$ тоже делится на 101.

6. Найдите все натуральные a такие, что для любого натурального n число $4(a^n+1)$ является точным кубом.

7. Дано натуральное число a. Докажите, что среди чисел вида 2^n-a найдутся числа со сколь угодно большими простыми делителями.