

1. Лемма об отношении синусов. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка X . Докажите, что $\frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XAC} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{AB}{AC}$.

2. В треугольнике ABC проведена симедиана AS (точка S лежит на стороне BC). Докажите, что $BS/SC = AB^2/AC^2$.

3. Тригонометрическая теорема Чевы. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны точки A_1, B_1, C_1 . Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle A_1AB} \cdot \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle B_1BC} \cdot \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle C_1CA} = 1$.

4. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что его диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

5. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты BH_B и CH_C . Точки X и Y симметричны точкам H_B и H_C относительно середин сторон AC и AB соответственно. Докажите, что прямая AO делит отрезок XY пополам.

6. Окружность Ω пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC в точках $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ соответственно (порядок указан по часовой стрелке).

а) Прямые C_1B_1 и B_2C_2 пересекаются в точке X_A , аналогично определим точки X_B и X_C . Докажите, что прямые AX_A, BX_B и CX_C пересекаются в одной точке.

б) Прямые A_1B_1 и A_2C_2 пересекаются в точке Y_A , аналогично определим точки Y_B и Y_C . Докажите, что прямые AY_A, BY_B и CY_C пересекаются в одной точке.

7. Чевяны AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Окружность ω_A касается стороны BC в точке A_1 и меньшей дуги BC окружности (ABC) в точке A' . Аналогично определяются точки B' и C' . Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

8. Пусть A_0, B_0, C_0 — точки касания вписанной окружности ω треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB соответственно. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на окружности ω произвольным способом. Докажите, что если прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_1, BB_1, CC_1 тоже пересекаются в одной точке.

9. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точка M — середина BC . Докажите, что прямые B_1C_1, AM и IA_1 пересекаются в одной точке.

10. Чевяны AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P . Окружности (BPC_1) и (CPB_1) пересекаются второй раз в точке M_A . Аналогично определяются точки M_B и M_C . Докажите, что прямые AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в одной точке.

11. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

1. Лемма об отношении синусов. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка X . Докажите, что $\frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XAC} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{AB}{AC}$.

2. В треугольнике ABC проведена симедиана AS (точка S лежит на стороне BC). Докажите, что $BS/SC = AB^2/AC^2$.

3. Тригонометрическая теорема Чевы. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны точки A_1, B_1, C_1 . Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle A_1AB} \cdot \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle B_1BC} \cdot \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle C_1CA} = 1$.

4. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что его диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

5. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты BH_B и CH_C . Точки X и Y симметричны точкам H_B и H_C относительно середин сторон AC и AB соответственно. Докажите, что прямая AO делит отрезок XY пополам.

6. Окружность Ω пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC в точках $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ соответственно (порядок указан по часовой стрелке).

а) Прямые C_1B_1 и B_2C_2 пересекаются в точке X_A , аналогично определим точки X_B и X_C . Докажите, что прямые AX_A, BX_B и CX_C пересекаются в одной точке.

б) Прямые A_1B_1 и A_2C_2 пересекаются в точке Y_A , аналогично определим точки Y_B и Y_C . Докажите, что прямые AY_A, BY_B и CY_C пересекаются в одной точке.

7. Чевяны AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Окружность ω_A касается стороны BC в точке A_1 и меньшей дуги BC окружности (ABC) в точке A' . Аналогично определяются точки B' и C' . Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

8. Пусть A_0, B_0, C_0 — точки касания вписанной окружности ω треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB соответственно. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на окружности ω произвольным способом. Докажите, что если прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_1, BB_1, CC_1 тоже пересекаются в одной точке.

9. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точка M — середина BC . Докажите, что прямые B_1C_1, AM и IA_1 пересекаются в одной точке.

10. Чевяны AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P . Окружности (BPC_1) и (CPB_1) пересекаются второй раз в точке M_A . Аналогично определяются точки M_B и M_C . Докажите, что прямые AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в одной точке.

11. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются в одной точке.