9 класс	Решения	9 сентября 2019

1. Среди всех натуральных чисел, не превосходящих 50, Петя хочет выбрать как можно больше чисел так, чтобы любые два различались хотя бы на 4.

а) Сколько чисел он выберет?

б) Сколькими способами он может это сделать?

Ответ. а) 13; **б)** 14.

Решение. а) Разобьём все числа на 13 групп: 12 четвёрок последовательных чисел $(1, \ldots, 4)$, $(5, \ldots, 8)$, $\ldots$,$(45, \ldots, 48)$ и одну пару $(49, 50)$. В каждой группе Петя выберет не более одного числа, поэтому всего чисел не больше 13. Пример на 13 чисел: $1, 5, 9, \ldots, 49$.

б) Упорядочим 13 чисел Пети по возрастанию $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{13}$. Определим разности соседних чисел $d_i = a_{i+1} - a_i$ для всех $i = 1, \ldots, 12$.

Заметим, что каждая последовательность однозначно задаётся набором чисел $a_1, d_1, \ldots, d_{12}$ (так, $a_j = a_1 + d_1 + \ldots + d_{j-1}$). На эти числа ограничения следующие: все они натуральные, $d_i \geqslant 4$ для всех i, $a_1 + d_1 + \ldots + d_{12} \leqslant 50$, откуда получаем $d_1 + \ldots + d_{12} \leqslant 49$.

Если среди d_i существует число, не меньшее 6, то $d_1 + \ldots + d_{12} \geqslant 6 + 11 \cdot 4 = 50$, что невозможно. Значит, все d_i не больше 5.

Если среди d_i существуют два числа, не меньших 5, то $d_1 + \ldots + d_{12} \geqslant 5 + 5 + 10 \cdot 4 = 50$, что невозможно. Значит, существует не более одного d_i, равного 5.

Если среди d_i существует число, равное 5 (выбрать его можно 12 способами), то все остальные разности равны 4, и $d_1 + \ldots + d_{12} = 49 = a_{13} - a_1$, что возможно лишь в случае $a_1 = 1$, $a_{13} = 50$. Тогда последовательность однозначно восстанавливается.

Если среди d_i нет чисел, равных 5, то все они равны 4, и $d_1 + \ldots + d_{12} = 48 = a_{13} - a_1$, что возможно лишь в случае $a_1 = 1$, $a_{13} = 49$ или $a_1 = 2$, $a_{13} = 50$. Тогда последовательность однозначно восстанавливается в каждом их этих двух случаев.

Итого имеем $12 + 2 = 14$ способов.

2. Докажите, что стороны любого неравнобедренного треугольника можно либо все увеличить, либо все уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы получился прямоугольный треугольник.

Решение. Упорядочим стороны треугольника $a > b > c$. Докажем, что существует x, для которого $(b+x)^2+(c+x)^2=(a+x)^2$. Это эквивалентно квадратному уравнению $x^2+2x(b+c-a)+b^2+c^2-a^2=0$. Его дискриминант D равен

$$4(b+c-a)^2-4(b^2+c^2-a^2)=4(2a^2-2ab-2ac+2bc)=8(a-b)(a-c)>0,$$

поэтому у него есть корень $x=\frac{-2(b+c-a)+\sqrt{D}}{2}=a-b-c+\sqrt{\frac{D}{4}}$. Осталось заметить, что числа $a+x, b+x, c+x$ положительны (поскольку наименьшее из них $c+(a-b-c+\sqrt{\frac{D}{4}})=a-b+\sqrt{\frac{D}{4}}$ положительно), поэтому по обратной теореме Пифагора треугольник со сторонами $a+x, b+x, c+x$ — прямоугольный.

3. Сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N чётно.

Решение. Обозначим через $s(A)$ сумму цифр числа A.

Из рассмотрения сложения в столбик двух чисел A и B следует, что $s(A+B)\leqslant s(A)+s(B)$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда при сложении нет переносов через разряд. Тем самым, из условия задачи вытекает, что при сложении $5N+5N=10N$ нет переносов через разряд, поскольку $s(10N)=s(N)=100$. Но число $5N$ оканчивается на 5 или на 0 в случае соответственно нечётного и чётного N. Первый случай отпадает, так как иначе возникает перенос в последнем разряде.

4. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω и точка B ($B\neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω, и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

Решение. По теореме о произведении отрезков хорд величина $XA\cdot AY$ не зависит от положения хорды XY и равна некоторой постоянной величине d. На прямой AB выберем точку C такую, что $AC=\frac{d}{AB}$, причём A лежит между B и C. Тогда $AB\cdot AC=XA\cdot AY=d$, следовательно точки X, B, Y и C лежат на одной окружности. Это означает, что окружности, описанные около треугольников BXY, проходят через фиксированные точки B и C, поэтому их центры лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BC.

5. N студентов сдают зачёт (каждый либо сдаст, либо не сдаст). Преподаватель по очереди подзывает студентов и спрашивает только один вопрос: «Сколько человек сегодня сдаст?». В ответ студент должен назвать целое число от 0 до N, после чего преподаватель ставит «зачёт» или «незачёт», а все остальные об этом сразу же узнают. Если после того, как все студенты ответят, найдётся назвавший правильное количество сдавших и получивший «незачёт», то преподаватель признаёт свою некомпетентность и ставит «зачёт» ВСЕМ, вне зависимости от их ответа. Могут ли студенты заранее договориться так, чтобы все сдали, вне зависимости от действий преподавателя?

Решение. Опишем, как договориться студентам, чтобы всем сдать зачёт. Рассмотрим конкретного студента Дениса. Пусть Денис представит, что зачёт он не сдаст, а все, кто отвечает после него — сдадут. Тогда в качестве ответа Денис назовёт суммарное количество студентов, которые сдадут зачёт в этом случае. Иначе говоря, если k студентов не сдали зачёт, то Денис назовёт число $99 - k$.

Докажем, что, придерживаясь такой стратегии, все студенты сдадут зачёт. Если все студенты сдали, то они добились своей цели. Иначе рассмотрим последнего студента Евгения, который не сдал. Поскольку после Евгения все зачёт сдали, то он ответил на вопрос правильно. Таким образом, преподаватель признает свою некомпетентность.

6. Три натуральных числа назовём *хорошей тройкой*, если существует натуральное число n такое, что любое число из тройки, увеличенное на n, делится на произведение двух оставшихся чисел. Найдите все хорошие тройки.

Ответ. Все тройки вида $(sb^2 + b, b, b)$ и их перестановки, где b — натуральное число, а s — целое неотрицательное.

Решение. Упорядочим числа в хорошей тройке $a \geqslant b \geqslant c$.

Так как $a \mid b+n$ и $a \mid c+n$, то $a \mid b-c$, но $0 \leqslant b-c < b \leqslant a$, откуда следует $b = c$. Кроме того, из условий $b \mid a+n$ и $b \mid c+n$ следует, что $b \mid a-c = a-b$, поэтому $b \mid a$. Значит, мы имеем дело с тройкой чисел (kb, b, b) (или её перестановкой).

По условию $kb^2 \mid b+n$ и $b^2 \mid kb+n$, откуда $b^2 \mid b(k-1)$, т.е. $k = sb+1$ для некоторого целого неотрицательного s. Осталось заметить, что любая перестановка тройки (sb^2+b, b, b) является хорошей, поскольку, как несложно проверить, в качестве n подойдёт число $sb^3 + b^2 - b$.