9 класс Отборочная олимпиада 9 сентября 2019

1. Среди всех натуральных чисел, не превосходящих 50, Петя хочет выбрать как можно больше чисел так, чтобы любые два различались хотя бы на 4.

а) Сколько чисел он выберет?

б) Сколькими способами он может это сделать?

2. Докажите, что стороны любого неравнобедренного треугольника можно либо все увеличить, либо все уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы получился прямоугольный треугольник.

3. Сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N чётно.

4. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω, и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

5. N студентов сдают зачёт (каждый либо сдаст, либо не сдаст). Преподаватель по очереди подзывает студентов и спрашивает только один вопрос: «Сколько человек сегодня сдаст?». В ответ студент должен назвать целое число от 0 до N, после чего преподаватель ставит «зачёт» или «незачёт», а все остальные об этом сразу же узнают. Если после того, как все студенты ответят, найдётся назвавший правильное количество сдавших и получивший «незачёт», то преподаватель признаёт свою некомпетентность и ставит «зачёт» ВСЕМ, вне зависимости от их ответа. Могут ли студенты заранее договориться так, чтобы все сдали, вне зависимости от действий преподавателя?

6. Три натуральных числа назовём *хорошей тройкой*, если существует натуральное число n такое, что любое число из тройки, увеличенное на n, делится на произведение двух оставшихся чисел. Найдите все хорошие тройки.

9 класс Отборочная олимпиада 9 сентября 2019

1. Среди всех натуральных чисел, не превосходящих 50, Петя хочет выбрать как можно больше чисел так, чтобы любые два различались хотя бы на 4.

а) Сколько чисел он выберет?

б) Сколькими способами он может это сделать?

2. Докажите, что стороны любого неравнобедренного треугольника можно либо все увеличить, либо все уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы получился прямоугольный треугольник.

3. Сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N чётно.

4. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω, и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

5. N студентов сдают зачёт (каждый либо сдаст, либо не сдаст). Преподаватель по очереди подзывает студентов и спрашивает только один вопрос: «Сколько человек сегодня сдаст?». В ответ студент должен назвать целое число от 0 до N, после чего преподаватель ставит «зачёт» или «незачёт», а все остальные об этом сразу же узнают. Если после того, как все студенты ответят, найдётся назвавший правильное количество сдавших и получивший «незачёт», то преподаватель признаёт свою некомпетентность и ставит «зачёт» ВСЕМ, вне зависимости от их ответа. Могут ли студенты заранее договориться так, чтобы все сдали, вне зависимости от действий преподавателя?

6. Три натуральных числа назовём *хорошей тройкой*, если существует натуральное число n такое, что любое число из тройки, увеличенное на n, делится на произведение двух оставшихся чисел. Найдите все хорошие тройки.