Олимпиада

1. На доске записано число 4. Паша может за один ход увеличить записанное на доске число на любой из его делителей, отличный от 1 и от самого числа. Коля называет Паше некоторое составное число. Всегда ли Паша сможет получить это число за несколько ходов?

Решение. *Ответ: да, всегда.*

Добавляя к числу по 2, приходим для любого простого p к числу $2p$. Далее добавляя по p приходим к любому числу kp. Что и требовалось доказать.

2. Петя и Вася по очереди вычеркивают по одному числу из ряда 1, 2, 3, ..., 2019 до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает Петя, если нет — Вася. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. *Ответ: Петя.*

Первым ходом Петя вычёркивает 2015. Далее действуем по следующей стратегии: если Вася вычёркивает число $5k+1$, то Петя вычёркивает число $5k+4$, и наоборот, а если Вася вычёркивает число $5k+2$, то Петя вычёркивает число $5k+3$ и наоборот. В случае же, если Вася вычёркивает число кратное 5, то Петя вычёркивает любое из оставшихся кратных 5 чисел (так как после первого хода Пети таких чисел осталось чётное число, то Петя всегда сможет сделать ход). Тогда после хода Пети всегда остаётся чётное количество чисел, причём их сумма кратна 5.

3. Дан неравнобедренный треугольник ABC. На его сторонах AB и BC отмечены точки K и L такие, что прямые KL и AC параллельны. Отрезки AL и KC пересекаются в точке S. Известно, что $AK = AS$ и $KL = LC$. Докажите,что $AL = KB$.

Решение.

Пусть $\angle AKS = \alpha, \angle LKC = \beta$. Тогда $\angle ASK = \alpha$, так как треугольник AKS — равнобедренный. $\angle LSC = \angle ASK = \alpha$ как вертикальные углы. $\angle LCK = \angle LKC = \beta$, поскольку треугольник LKC — равнобедренный. Т.к. $KL||AC$, $\angle ACS = \beta$. Из треугольников AKC и LSC получаем, что $\angle CAK = 180° - \alpha - \beta, \angle SLC = 180° - \alpha - \beta$.Таким образом,$\angle CAK = \angle ALC$. Заметим, что$\angle LKB = \angle CAK, \angle ACL = \angle KLB$ т.к. $KL||AC$. Значит, треугольники ALC и BKL равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $AL = KB$.

4. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 20 расставить в вершинах и серединах ребер куба так, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

Решение. *Ответ: Нет.*

Допустим у нас получилось так расставить числа. Заметим, что 1 и 20 не могут стоять в середине ребра, так как полусумма двух чисел всегда не меньше меньшего из них и не больше большего. Тогда найдутся две соседние вершины, в которых стоят числа разной чётности. В таком случае на ребре, соединяющем эти вершины, должно быть записано нецелое число. Противоречие.

5. На доске написано число 2000. Разрешается переставить в нем произвольным образом первые три цифры (ставить цифру 0 на первое место нельзя) или прибавить 361. Через 100 таких операций вновь получили 2000. Сколько раз прибавляли 361, если известно, что это сделали хотя бы один раз?

Решение. *Ответ: 90*

Заметим, что при перестановке первых трех цифр числа, его остатки при делении на 9 и 10 не меняются, а при добавлении к числу 361 каждый из этих же остатков увеличивается на 1. Т.к. через 100 операций число не изменилось, то и его остатки при делении на 9 и 10 тоже не изменились, а это значит, что количество прибавлений числа 361 должно делиться и на 9, и на 10. Среди чисел от 0 до 100 таких ровно два 0 и 90, но 0 не подходит по условию, следовательно ответ 90.

6. Ладья, делая ходы по вертикали и горизонтали на соседнее поле, за 64 хода обошла все поля шахматной доски 8×8 и вернулась на исходное поле. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали.

Решение.

Соединим центры полей в порядке обхода их ладьей, получим замкнутую ломаную с углами $90°$ между звеньями. Пусть D — область ограниченная этой ломанной. Теперь рассмотрим координатную сетку, узлы которой соответствуют центрам полей доски. По известной формуле Пика площадь S области D равна $n + \frac{m}{2} - 1$, где n — количество узлов, находящихся внутри D, а m — количество узлов, находящихся на её границе. В нашем случае $n = 0$, $m = 64$, то есть $S = 31$.

Рассмотрим полосатую раскраску доски: нечётные горизонтали — чёрные, чётные — белые. Разрежем область D на прямоугольники ширины 1, проведя вертикальные прямые через центры всех полей. Каждый из них ограничен сверху и снизу горизонтальными отрезками-ходами. Площадь каждого прямоугольника — целое число, причем оно нечётно тогда и только тогда, когда ограничивающие его горизонтальные ходы находятся в горизонталях разного цвета.

Поскольку площадь S нечётна, количество прямоугольников нечётной площади нёчетно. Значит, нечётно и количество k ходов, сделанных в чёрных горизонталях (такие ходы "входят"по одному в прямоугольники нечётной площади и по два в некоторые прямоугольники чётной площади).

Всего из 32 чёрных полей сделано 32 хода. При этом k из них (горизонтальных) сделаны снова на чёрные поля, а $32 - k$ (вертикальных) — с чёрных полей на белые. Но ладья после обхода доски вернулась на поле того же цвета, поэтому количество ходов с чёрных полей на белые равно количеству ходов с белых полей на чёрные. Таким образом количество всех вертикальных ходов равно $64 - 2k$, а количество горизонтальных ходов равно $2k$ и, следовательно, не может равняться 32 (ведь k нечётно).