

## Неравенство КБШ

В данном листке все переменные по умолчанию принимают только положительные значения.

### 1. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2.$$

2.

$$(a_1 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

3.

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}.$$

4. Пусть  $ab + bc + ca \leq 1$ . Докажите, что

$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 8abc \left( \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \right).$$

5.

$$3 \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 4 \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2.$$

6.

$$\frac{a^3 + 3b^3}{5a+b} + \frac{b^3 + 3c^3}{5b+c} + \frac{c^3 + 3a^3}{5c+a} \geq \frac{2}{3} (a^2 + b^2 + c^2).$$

7. Пусть  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Докажите неравенство

$$\left( \sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i,j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

8.

$$\frac{ab}{c^2 + d^2} + \frac{bc}{d^2 + a^2} + \frac{cd}{a^2 + b^2} + \frac{da}{b^2 + c^2} \geq \frac{(a+c)(b+d)}{ac + bd}.$$

9. Известно, что  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1$ . Докажите, что

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_{100}^2 a_1 \leq \frac{12}{25}.$$